

Теоретические задачи для недели №6

Александр Курилкин, ШАД HELPER

17 августа 2020 г.

Во всех задачах время работы может быть амортизированным или ожидаемым (то есть матожидание времени работы), если не указано иное.

№1

Приведите пример графа с отрицательными весами ребер, на котором алгоритм Дейкстры неверно посчитает кратчайшие расстояния.

№2

Предложите алгоритм восстановления кратчайшего пути за его длину (в вершинах), если мы запускали алгоритм Флойда.

№3

Человечество с помощью бесполезных структур данных (например, фибоначчьева куча) умеет делать алгоритм Дейкстры за $O(n \log n + m)$. Докажите, что эта оценка является нижней оценкой для алгоритма Дейкстры, то есть нельзя сделать алгоритм Дейкстры быстрее.

№4*

Дан невзвешенный ориентированный граф и две вершины s и t в нем. За $O(n + m)$ для каждого ребра определите, лежит ли оно на каком-то кратчайшем пути из s в t , на всех кратчайших путях или ни на каком.

№5*

Чем могут быть полезны k -ичные кучи (как двоичные, но у каждой вершины по k детей) при реализации алгоритма Дейкстры?

№6*

Предложите полиномиальный алгоритм поиска цикла минимального среднего веса, то есть такого, что $\frac{\text{сумма весов ребер}}{\text{кол-во ребер}}$ в нем минимальна по всем циклам.

№7**

Дан ориентированный граф, в нем могут быть ребра отрицательного веса, но гарантируется отсутствие циклов отрицательного веса. Предложите алгоритм, считающий кратчайшие пути между всеми парами вершин за $O(nm \log n)$.