



ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Онлайн-образование

Проверить, идет ли запись!





Меня хорошо видно && слышно?

Ставьте ☐ , если все хорошо
Напишите в чат, если есть проблемы

Определитель матрицы



Рословец Фарида
@FaryaRos

Преподаватель



Фарида Рословец

- 7 лет опыта инженером – разработчиком электронных навигационных устройств
- Опыт репетиторства математики
- Автор блога о технологиях и продюсер OTUS трека эксплуатация

Правила вебинара



Активно участвуем



Задаем вопрос в чат



Off-topic обсуждаем в Slack #канал группы или #general



Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

Маршрут вебинара

Матрицы, операции и свойства



Умножение матриц



Транспонирование



Метод Гаусса



Матрицы

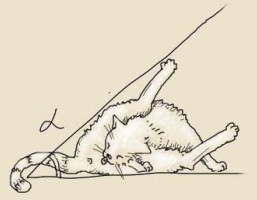
$$\text{СЛАУ: } \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Виды матриц



Котангенс

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица размера } 3 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{диагональные элементы произвольные}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{нулевая матрица}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{диагональные элементы равны 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} - \text{вектор-строка}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операции (сложение и вычитание матриц)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \Theta = \Theta + A = A$, где Θ - нулевая матрица
- $A - A = \Theta$
- Коммутативность: $A + B = B + A$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Операции (умножение матрицы на число)

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- $1 \cdot A = A$
- $0 \cdot A = \Theta$, где Θ - нулевая матрица
- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- $(k + n) \cdot A = k \cdot A + n \cdot A$
- $(k \cdot n) \cdot A = k \cdot (n \cdot A)$

$$C = 2A + 3B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операции (умножение матриц)

Определение. Результатом умножения матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ будет матрица $C_{m \times k}$ такая, что элемент матрицы C , стоящий в i -той строке и j -том столбце (c_{ij}), равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

«Строка на столбец»

$$\underbrace{C}_{m \times n} = \underbrace{A}_{m \times p} \cdot \underbrace{B}_{p \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Операции (умножение матриц)

Замечание. Две матрицы можно перемножить между собой тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

$$\underbrace{C}_{m \times n} = \underbrace{A}_{m \times p} \cdot \underbrace{B}_{p \times n}.$$

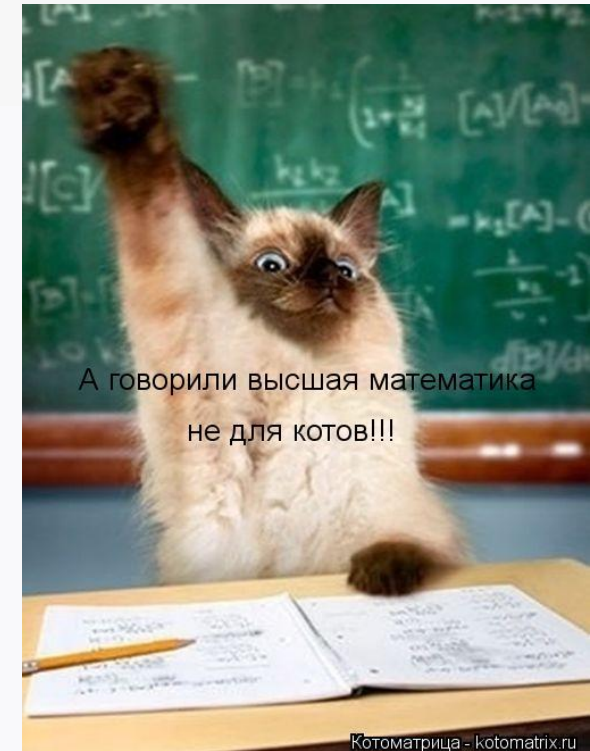
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

«Строка на столбец»

Операции (умножение матриц)

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - произведение матриц ассоциативно;
- $(z \cdot A) \cdot B = z \cdot (A \cdot B)$, где z - число;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ - произведение матриц дистрибутивно;
- $E_n \cdot A_{nm} = A_{nm} \cdot E_m = A_{nm}$ - умножение на единичную матрицу;
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ - в общем случае произведение матриц не коммутативно.
- Произведением двух матриц есть матрица, у которой столько строк, сколько их у левого сомножителя, и столько столбцов, сколько их у правого сомножителя.

$$A = (1 \ 2 \ 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Транспонирование

Определение. Транспонирование матрицы - это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами:

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

Для любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ транспонированной матрицей называется матрица}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Транспонирование

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{(2 \times 3)}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Если матрица A имеет размер $n \times m$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $m \times n$;
- $(A^T)^T = A$;
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса

Определение. **Элементарные преобразования матрицы** — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица.

Элементарными преобразованиями строк называют:

- перестановку местами любых двух строк матрицы;
- умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;
- прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число.

Метод Гаусса (памятка)




1. В первом столбце выбрать элемент, отличный от нуля (**ведущий элемент**). Строку с ведущим элементом (**ведущая строка**), если она не первая, переставить на место первой строки (преобразование I типа). Если в первом столбце нет ведущего (все элементы равны нулю), то исключаем этот столбец, и продолжаем поиск ведущего элемента в оставшейся части матрицы. Преобразования заканчиваются, если исключены все столбцы или в оставшейся части матрицы все элементы нулевые.
2. Разделить все элементы ведущей строки на ведущий элемент (преобразование II типа). Если ведущая строка последняя, то на этом преобразования следует закончить.
3. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такое число, чтобы элементы, стоящие под ведущим оказались равными нулю (преобразование III типа).
4. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, перейти к пункту 1, в котором все описанные действия применяются к оставшейся части матрицы.

Метод Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

The background of the entire image is an aerial photograph of a dense city skyline, likely New York City, with numerous skyscrapers. A semi-transparent blue overlay covers the entire image. In the center, there is a horizontal band with a gradient from teal on the left to dark blue on the right. Overlaid on this band is a white network pattern of dots connected by thin lines. The text is centered within this band.

Заполните, пожалуйста,
опрос о занятии по ссылке в чате



Спасибо за внимание!
Приходите на следующие вебинары