



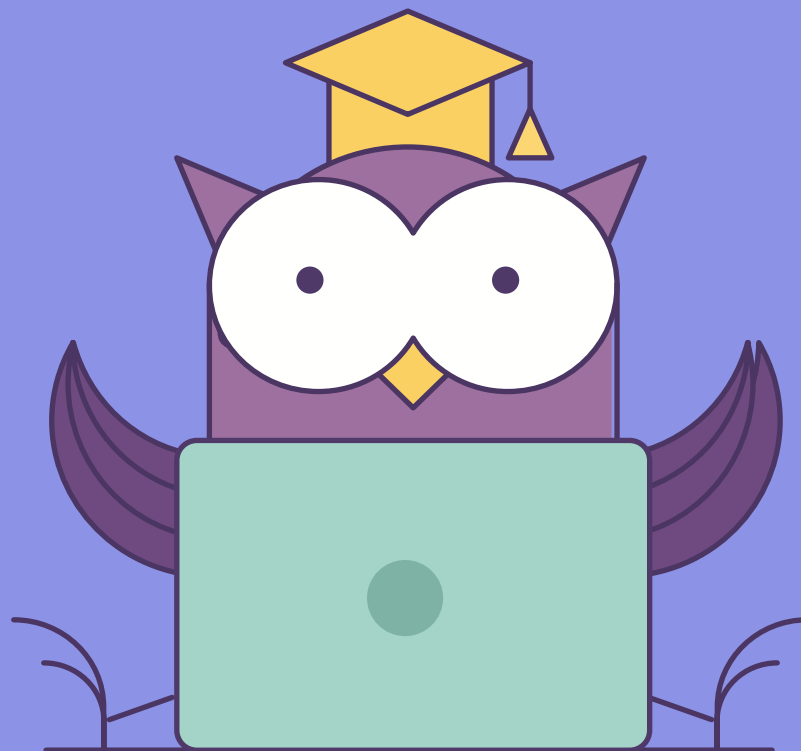
ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Векторные пространства

Подпространства, линейные
трансформации



Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте  если все хорошо

**Не забыть включить
запись!!!**

Правила вебинара

ОТ U S



Активно участвуем



Задаем вопросы в чат



Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу



Иван Леонов

- * Data Science Team Lead @ Globant
- * 4 года в Data Science
- * >20 лет профессионального опыта (Software Development, Data Architecture, Product & Operations Management)
- * Работал в AIG, TV Guide, MTV / Viacom, AdoTube, EPAM
- * Образование: University of Chicago, BS, Mathematics

- **Линейные пространства**
 - Свойства векторных пространств
 - Векторные пространства и подпространства
- **Линейные трансформации**
 - Линейные трансформации векторов
 - Умножение на матрицу как линейная трансформация
 - Линейные трансформации векторных пространств
 - Линейные трансформации в машинном обучении
- **Скалярное и векторное произведение векторов**
 - Скалярное произведение и его приложения
 - Векторное произведение

Векторные Пространства \mathbf{R}^n

Пространства, обозначаемые $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \dots$

Пространство \mathbf{R}^n состоит из всех вектор-столбцов с n компонентами

Мы пишем \mathbf{R} , потому что эти компоненты - вещественные числа

Примеры

Пространство \mathbf{R}^2 представимо обычной координатной плоскостью x - y . Компоненты вектора становятся точками x и y .

Как мы представим пространство \mathbf{R}^3 ?

\mathbf{R}^1 ?

Векторные Пространства \mathbb{R}^n

Операции над векторами

- Сложение векторов
- Умножение вектора на число

Другими словами - мы можем брать линейные комбинации векторов

Свойства операций над векторами

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Есть нулевой вектор: $x + 0 = x$
4. Есть вектор “ $-x$ ”: $x + (-x) = 0$
5. $1x = x$
6. $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$
7. $c(x + y) = cx + cy$
8. $(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x$

Векторные Пространства \mathbf{R}^n и другие

Вещественное векторное пространство

Множество векторов, вместе с правилами сложения векторов, и умножения вектора на число

Примеры векторных пространств НЕ \mathbf{R}^n

1. Бесконечномерное пространство \mathbf{R}^∞ .
2. Пространство матриц 2×3
3. Пространство функций $f(x)$, определённых на интервале $0 \leq x \leq 1$

Векторные Пространства

Векторное подпространство:

Подмножество V , которое само является векторным пространством: линейные комбинации векторов остаются в подпространстве

1. Если x и y лежат в V , то $x + y$ тоже лежит в V
2. Если мы умножим x из V на любой скаляр c , то cx тоже лежит в V

Следствие: нулевой вектор принадлежит каждому подпространству

Минимальное подпространство: нулевой вектор

Максимальное подпространство: ?

Векторные Пространства и Подпространство

Примеры

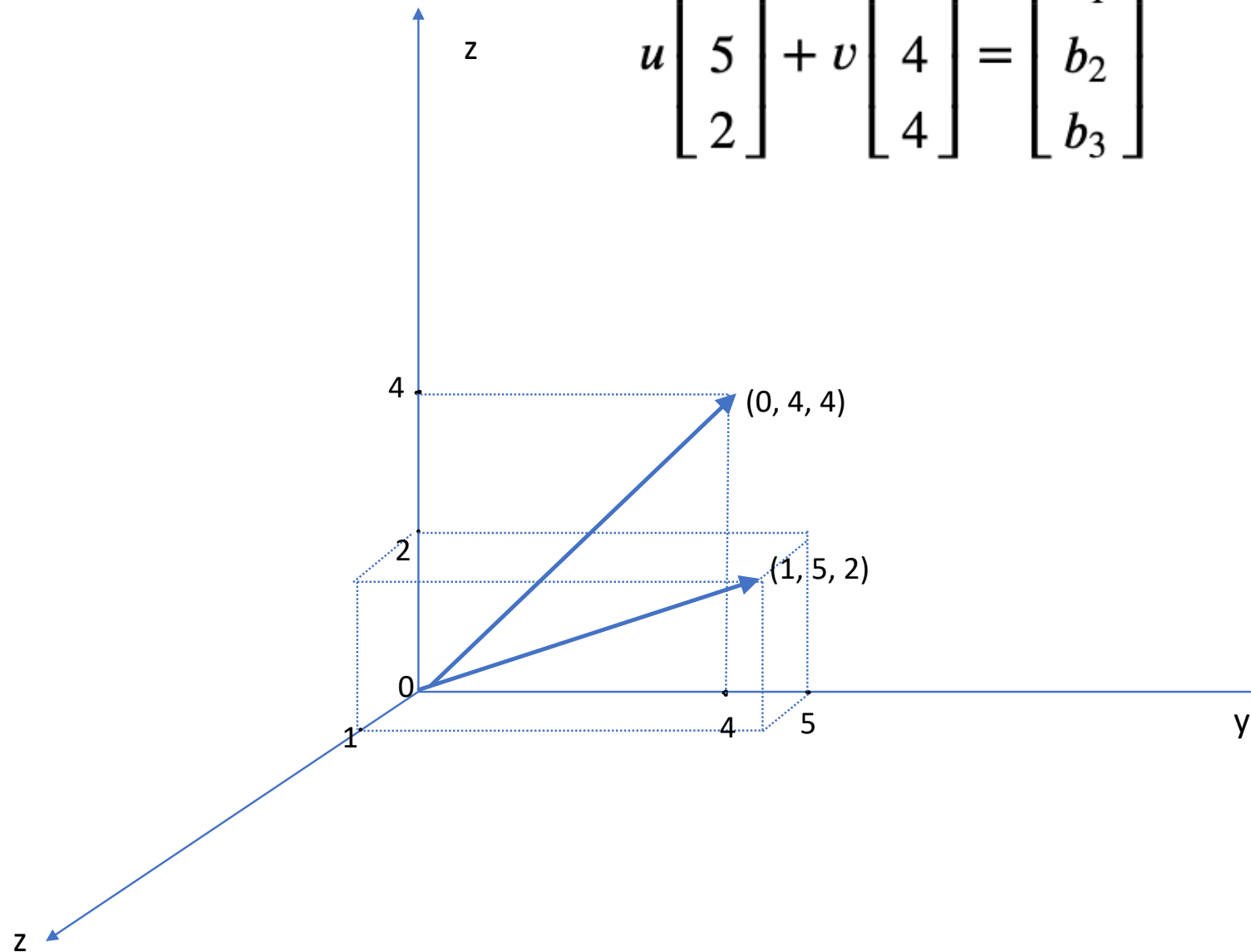
Все векторы в \mathbf{R}^2 с неотрицательными компонентами - подмножество НЕ является подпространством

Рассмотрим пространство матриц 2×3 . Множество симметричных матриц - является ли подпространством?

Векторные пространства

Связь с СЛАУ

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

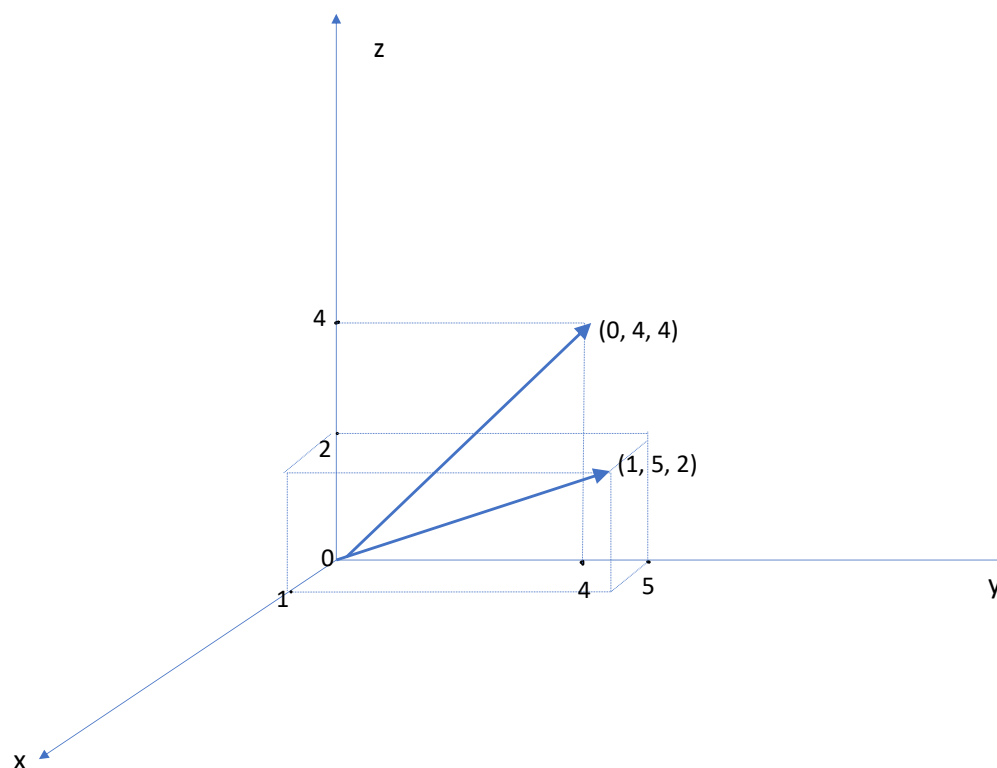


Векторные пространства

Связь с СЛАУ

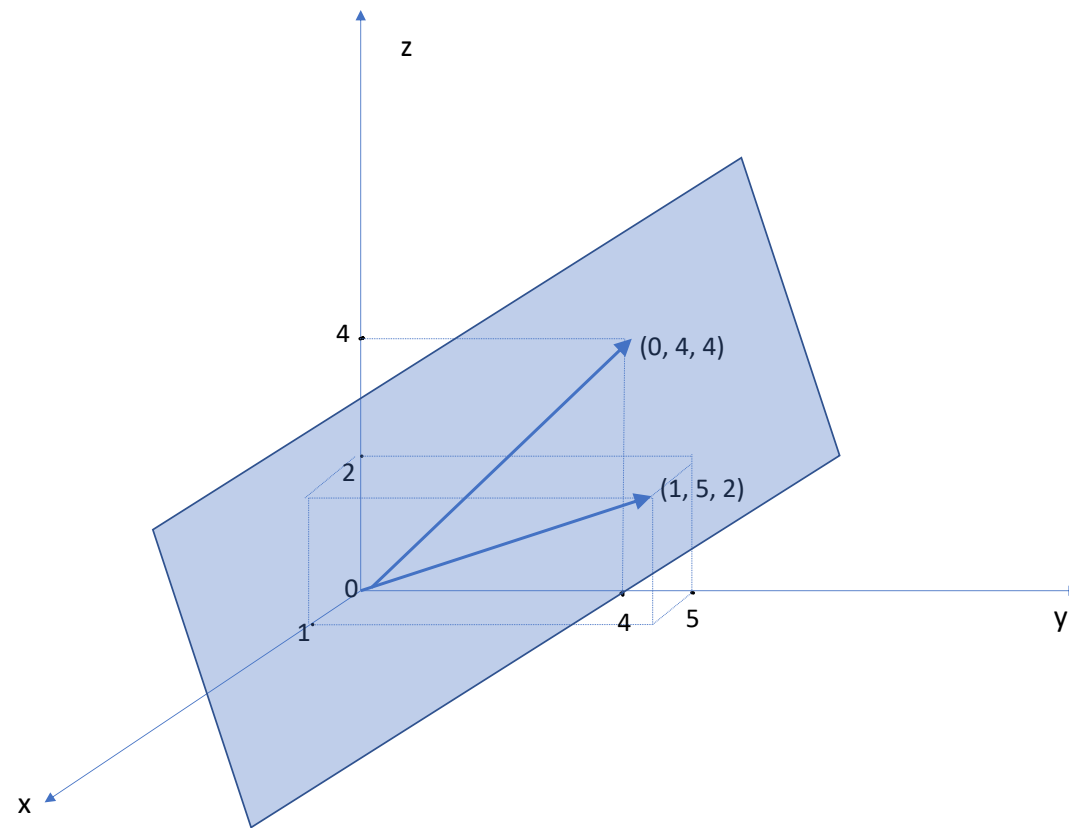
$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

При каких значениях
 b_1, b_2, b_3
уравнение $Ax = b$
имеет решение?



Векторные пространства

Связь с СЛАУ



$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Вектор (b_1, b_2, b_3) лежит в плоскости,
образованной вектор-столбцами матрицы A

Линейные трансформации

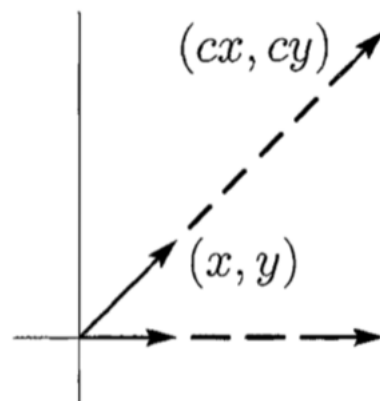
Пусть x - n -мерный вектор, и A - матрица $n \times n$. Умножая A на x , мы получаем новый вектор Ax . Таким образом, матрица A трансформирует x . Это происходит в каждой точке n -мерного пространства \mathbf{R}^n . Всё пространство трансформируется матрицей A .

Линейные трансформации

Пусть x - n -мерный вектор, и A - матрица $n \times n$. Умножая A на x , мы получаем новый вектор Ax . Таким образом, матрица A трансформирует x . Это происходит в каждой точке n -мерного пространства \mathbf{R}^n . Всё пространство трансформируется матрицей A .

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Растяжение-сжатие

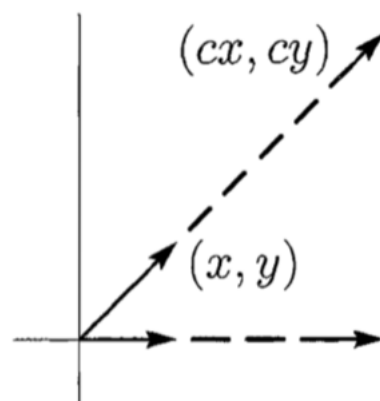


Линейные трансформации

Пусть x - n -мерный вектор, и A - матрица $n \times n$. Умножая A на x , мы получаем новый вектор Ax . Таким образом, матрица A трансформирует x . Это происходит в каждой точке n -мерного пространства \mathbf{R}^n . Всё пространство трансформируется матрицей A .

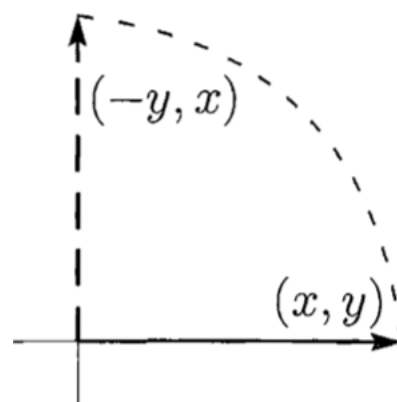
$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Растяжение-сжатие



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вращение

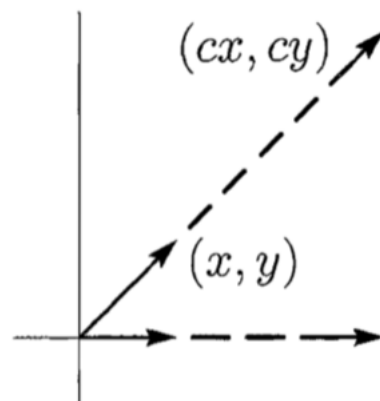


Линейные трансформации

Пусть x - n -мерный вектор, и A - матрица $n \times n$. Умножая A на x , мы получаем новый вектор Ax . Таким образом, матрица A трансформирует x . Это происходит в каждой точке n -мерного пространства \mathbf{R}^n . Всё пространство трансформируется матрицей A .

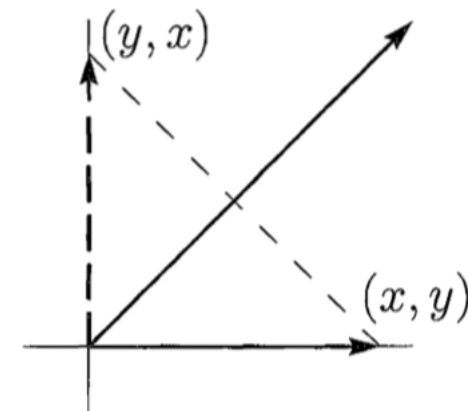
$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Растяжение-сжатие



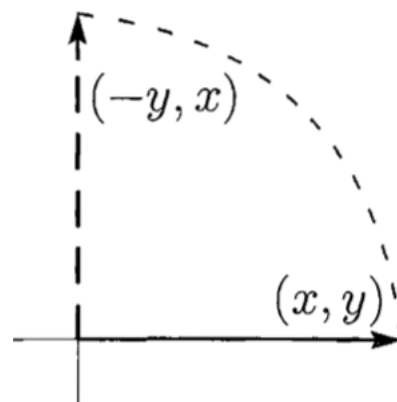
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Отражение



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вращение

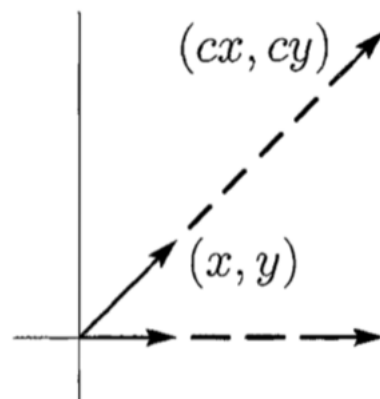


Линейные трансформации

Пусть x - n -мерный вектор, и A - матрица $n \times n$. Умножая A на x , мы получаем новый вектор Ax . Таким образом, матрица A трансформирует x . Это происходит в каждой точке n -мерного пространства \mathbf{R}^n . Всё пространство трансформируется матрицей A .

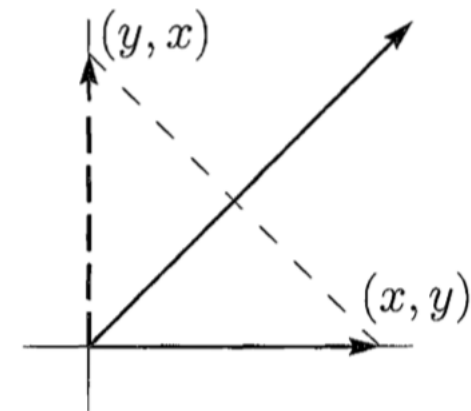
$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Растяжение-сжатие



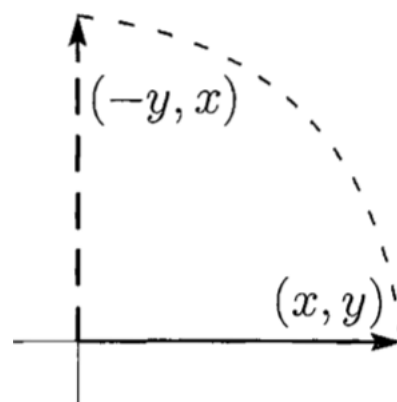
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Отражение



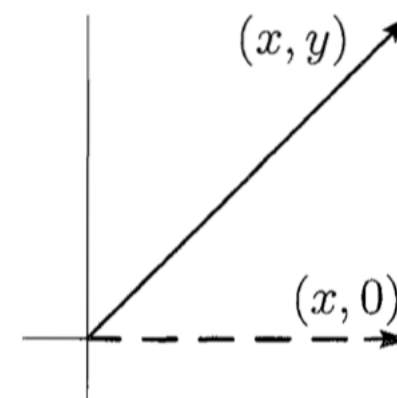
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вращение



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Проекция на ось



Линейные трансформации

Какие трансформации невозможны при умножении на A , $T(x) = Ax$?

1. Невозможно сдвинуть начало координат, т.к. $A0 = 0$ для любой матрицы
2. Если вектор x трансформируется в x' , то $2x$ должно трансформироваться в $2x'$. Для любого c , cx должно стать cx' , так как $A(cx) = cA(x)$
3. Если векторы x и y трансформируются в x' и y' , то их сумма должна трансформироваться в $x' + y'$, так как $A(x + y) = Ax + Ay$.

Трансформации, удовлетворяющие правилам 1-3, называются

линейными. Эти правила можно свести к формуле:

$A(cx+dy) = c(Ax) + d(Ay)$. Любая трансформация, удовлетворяющая этому правилу, называется **линейной**.

Линейные трансформации

Пример

Какая трансформация превращает x_1 и x_2 в Ax_1 и Ax_2 ?

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Линейные трансформации

Пример

Какая трансформация превращает x_1 и x_2 в Ax_1 и Ax_2 ?

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

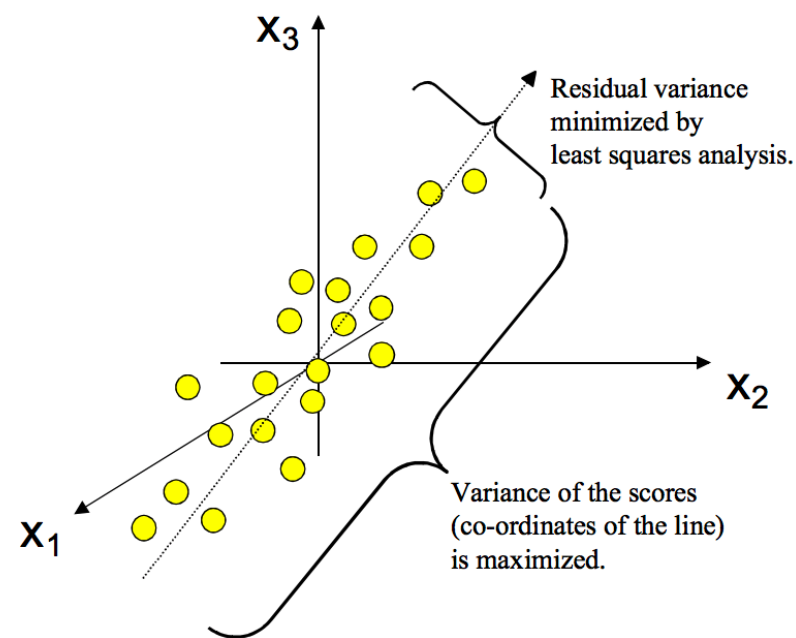
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Линейные преобразования векторных пространств

Матрица $m \times n$ - линейное преобразование:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 39 \end{bmatrix}$$

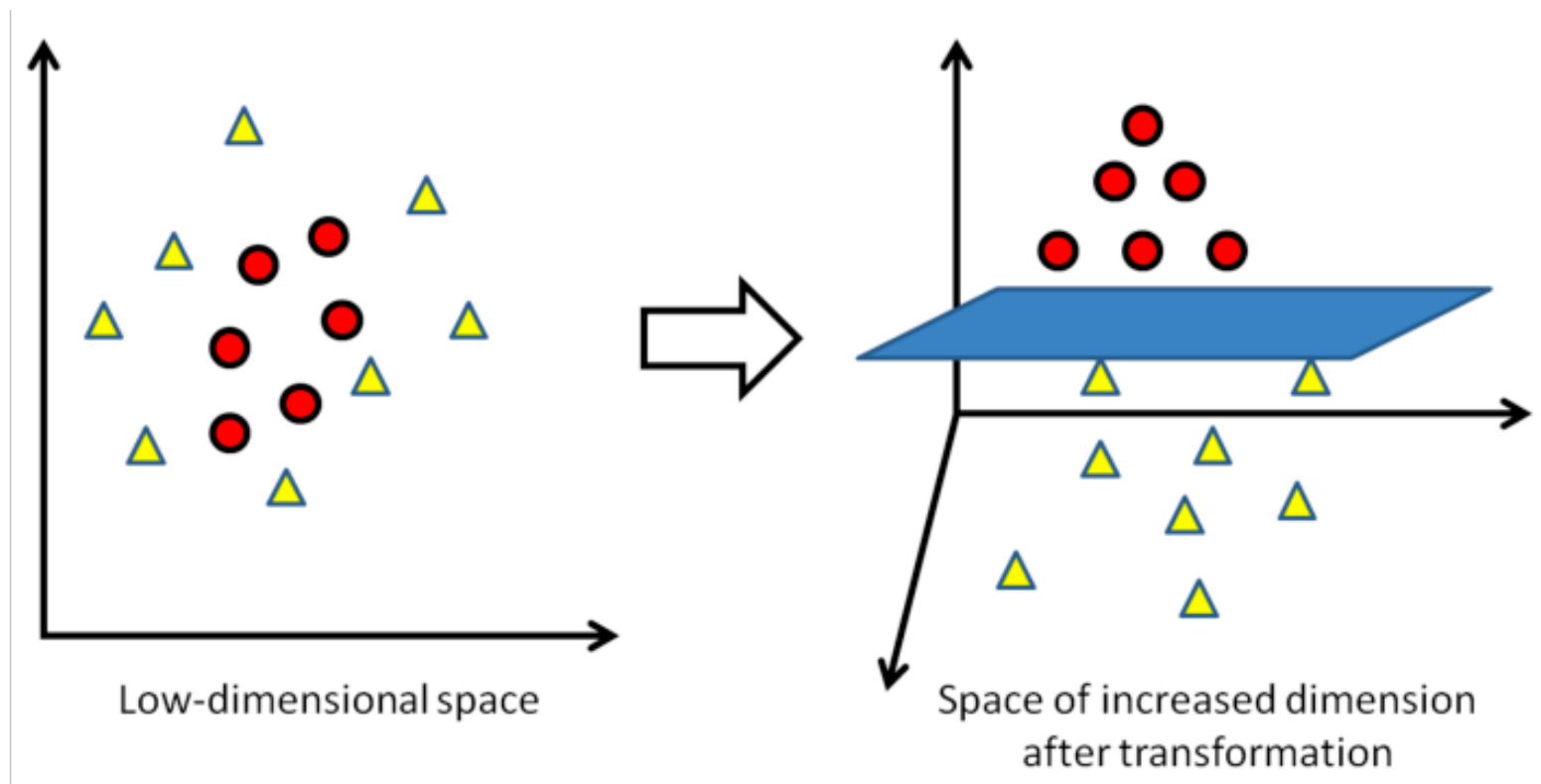


$$m < n$$

Линейные преобразования векторных пространств

Матрица $m \times n$ - линейное преобразование:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 51 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$m > n$$

Скалярное Произведение Векторов

Алгебраическое определение

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Тогда $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

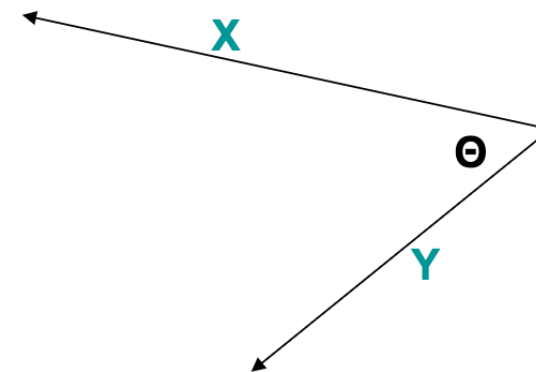
Скалярное Произведение Векторов

Алгебраическое определение

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
Тогда $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Геометрическое определение

$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$,
где θ - угол между x и y .



Скалярное произведение - мера сонаправленности векторов. Применяется в Машинном Обучении (Similarity Learning)

Скалярное Произведение Векторов

Свойства

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ - коммутативность

$\langle x, (y+z) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ - дистрибутивность относительно сложения

Не может быть ассоциативности. Почему?

Ортогональность: $\langle x, y \rangle = 0 \iff x, y$ перпендикулярны.

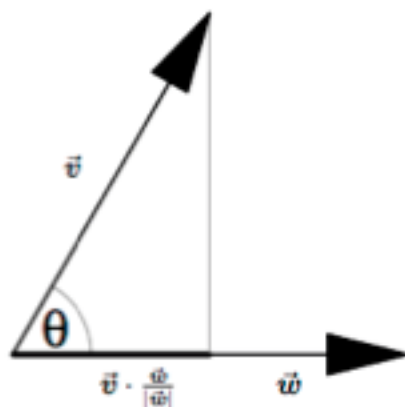
В отличие от умножения чисел, из $\langle x, y \rangle \neq 0$ НЕ следует, что один из векторов нулевой.

Векторное Произведение Векторов

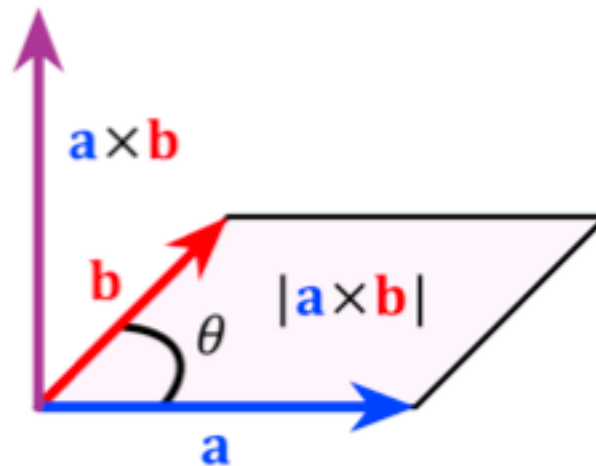
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

vector multiplication



dot product



cross product

Итоги

Сегодня мы научились:

Производить операции в векторных пространствах

**Определять, является ли подмножество векторного пространства
подпространствами**

Совершать линейные трансформации векторных пространств

Находить скалярное и векторное произведение векторов

Спасибо
за внимание!



<https://otus.ru/polls/5950/>