



ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Правила вебинара



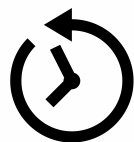
Активно участвуем



Задаем вопрос в чат или голосом



Off-topic обсуждаем в Slack #канал группы
или #general



Вопросы вижу в чате, могу ответить не
сразу

Случайные события

- Случайное событие
- Вероятность случайного события
- Основные формулы вычисления вероятностей



Цели занятия

После занятия вы будете знать:

1 что такое случайные события и какие операции с ними можно совершать

2 что такое вероятность случайного события

3 как находить вероятности различных случайных событий

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

 ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

| ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| Василий | Виктория | Иван | Сергей | Виталий |
| 182 см | 163 см | 177 см | 191 см | 175 см |
| брюнет | блондинка | блондин | брюнет | рыжий |
| в очках | без очков | без очкой | без очков | в очках |
| холост | не замужем | холост | холост | женат |

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

| ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| Василий | Виктория | Иван | Сергей | Виталий |
| 182 см | 163 см | 177 см | 191 см | 175 см |
| брюнет | блондинка | блондин | брюнет | рыжий |
| в очках | без очков | без очкой | без очков | в очках |
| холост | не замужем | холост | холост | женат |

$A = \{\text{имя вызванного студента начинается на В}\}$

$B = \{\text{вызванный студент не состоит в браке}\}$

$C = \{\text{вызванный студент ниже 180 см}\}$

$D = \{\text{вызванный студент в очках}\}$

$E = \{\text{вызванный студент – женщина}\}$

$F = \{\text{вызванный студент – брюнет}\}$

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

| ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| Василий | Виктория | Иван | Сергей | Виталий |
| 182 см | 163 см | 177 см | 191 см | 175 см |
| брюнет | блондинка | блондин | брюнет | рыжий |
| в очках | без очков | без очкой | без очков | в очках |
| холост | не замужем | холост | холост | женат |

$$A = \{\text{имя вызванного студента начинается на В}\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}$$

$$B = \{\text{вызванный студент не состоит в браке}\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$$C = \{\text{вызванный студент ниже 180 см}\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$$

$$D = \{\text{вызванный студент в очках}\} = \{\omega_1, \omega_5\}$$

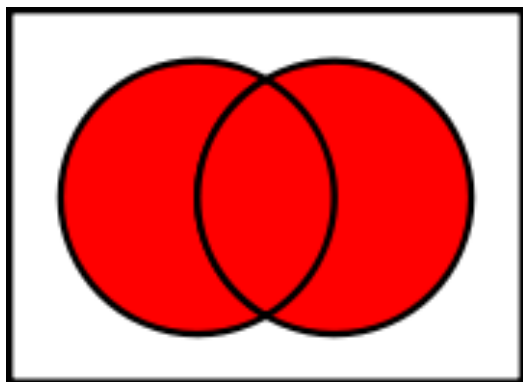
$$E = \{\text{вызванный студент – женщина}\} = \{\omega_2\}$$

$$F = \{\text{вызванный студент – брюнет}\} = \{\omega_2, \omega_4\}$$

Что такое случайное событие

Случайное событие – множество, элементами которого являются исходы опыта.

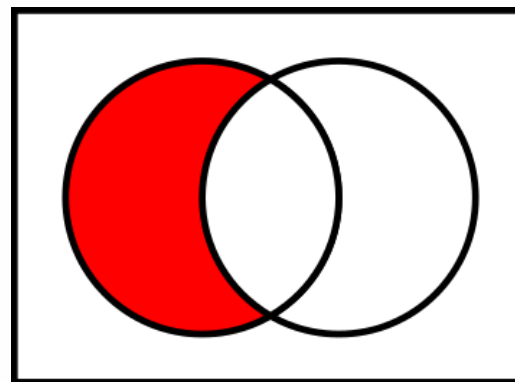
Операции над случайными событиями



$$A + B$$

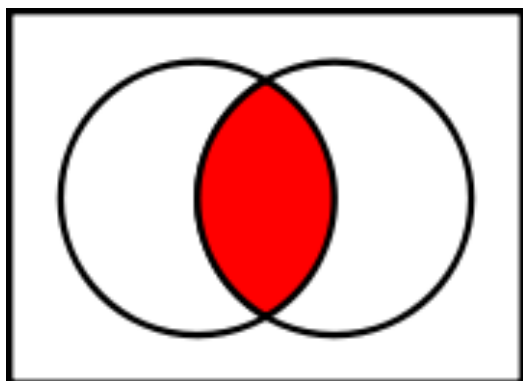
$$A \cup B$$

ИЛИ хотя бы 1 из 2-х: A или B



$$A \setminus B$$

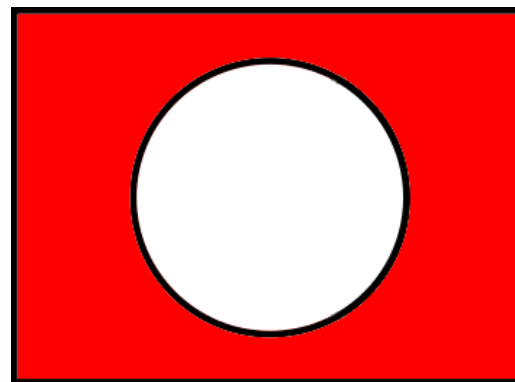
НО НЕ A, но не B



$$A B$$

$$A \cap B$$

И оба: и A, и B



$$\bar{A}$$

НЕ не A

Вероятность случайного события

def (неформальное)

Вероятность случайного события – число от 0 до 1, показывающее степень уверенности в том, что событие произойдёт.

def (математическое)

Вероятностью называется числовая функция $P(A)$, определённая на сигма-алгебре случайных событий, удовлетворяющая следующим свойствам (аксиомам вероятности):

A1) для любого случайного события A $P(A) \geq 0$

A2) $P(\Omega) = 1$

A3) если A и B не могут произойти одновременно, то
 $P(A + B) = P(A) + P(B)$

A4) если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots A_n \supset \dots$ и $A_1 A_2 A_3 \dots = \emptyset$
 то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

Классическая формула

Если исходы опыта равновероятны,
 n – общее число всех возможных исходов опыта,
 n_A – число исходов, благоприятных для события A ,

то $P(A) = \frac{n_A}{n}$

Классическая формула

Если исходы опыта равновероятны,
 n – общее число всех возможных исходов опыта,
 n_A – число исходов, благоприятных для события A ,

$$\text{то } P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Пример

Подбрасывается игральная кость. С какой вероятностью выпадет чётное число очков?

Классическая формула

Если исходы опыта равновероятны,
 n – общее число всех возможных исходов опыта,
 n_A – число исходов, благоприятных для события A ,

то
$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Пример

Подбрасывается игральная кость. С какой вероятностью выпадет чётное число очков?

$$n = 6, \quad n_A = 3$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$

Статистическое оценивание вероятности

Пусть опыт, с которым связано случайное событие, повторяется много раз.

N – общее число повторений опыта,

N_A – число повторений, при которых произошло событие A .

def

Частотой случайного события A называется число $\hat{P}_N(A) = \frac{N_A}{N}$

Когда число N повторений опыта стремится к бесконечности, частота события стремится к его вероятности.

$$\hat{P}_N(A) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P(A)$$

Независимость и несовместность

def

События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно при одном повторении опыта.

def

События A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) P(B)$$

Вероятности сложных событий

Условная вероятность

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n_{AB}}{n_B}$$

Формула умножения

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

Формула сложения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Вероятность обратного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Вероятности сложных событий

Пример

Система состоит из двух параллельно соединённых элементов и работает, если работает хотя бы один из них. Вероятность поломки первого элемента 0,1, вероятность поломки второго – 0,2. В настоящий момент система работает. С какой вероятностью первый элемент неисправен, если элементы выходят из строя независимо друг от друга?

Вероятности сложных событий

Пример

Система состоит из двух параллельно соединённых элементов и работает, если работает хотя бы один из них. Вероятность поломки первого элемента 0,1, вероятность поломки второго – 0,2. В настоящий момент система работает. С какой вероятностью первый элемент неисправен, если элементы выходят из строя независимо друг от друга?

$A = \{1\text{-й элемент работает}\}$

$B = \{2\text{-й элемент работает}\}$

$C = \{\text{система работает}\}$

Вероятности сложных событий

Пример

Система состоит из двух параллельно соединённых элементов и работает, если работает хотя бы один из них. Вероятность поломки первого элемента 0,1, вероятность поломки второго – 0,2. В настоящий момент система работает. С какой вероятностью первый элемент неисправен, если элементы выходят из строя независимо друг от друга?

$A = \{1\text{-й элемент работает}\}$

$B = \{2\text{-й элемент работает}\}$

$C = \{\text{система работает}\}$

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A} | C) &= P(\bar{A} | A + B) = \frac{P(\bar{A}(A + B))}{P(A + B)} = \frac{P(\bar{A}A + \bar{A}B)}{P(A + B)} = \\
 &= \frac{P(\bar{A}B)}{P(A + B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)}
 \end{aligned}$$

Формулы полной вероятности и Байеса

H_1, \dots, H_n – гипотезы об исходе опыта. В результате опыта всегда происходит ровно одно из этих событий.

A – другое событие, связанное с этим же опытом.

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$$

Формула Байеса

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}$$

Формулы полной вероятности и Байеса

Пример

При анализе крови на ВИЧ-инфекцию используется тест, который для ВИЧ-положительных людей с вероятностью 0,99, показывает, что человек инфицирован, а для ВИЧ-отрицательных с вероятностью 0,99 показывает, что человек не инфицирован. Человек сдал анализ и тест показал, что он ВИЧ-инфицированный. С какой вероятностью он действительно ВИЧ-инфицированный?

Формулы полной вероятности и Байеса

Пример

При анализе крови на ВИЧ-инфекцию используется тест, который для ВИЧ-положительных людей с вероятностью 0,99, показывает, что человек инфицирован, а для ВИЧ-отрицательных с вероятностью 0,99 показывает, что человек не инфицирован. Человек сдал анализ и тест показал, что он ВИЧ-инфицированный. С какой вероятностью он действительно ВИЧ-инфицированный?

$H_1 = \{\text{человек ВИЧ-инфицирован}\}$

$H_2 = \{\text{человек не ВИЧ-инфицирован}\}$

$A = \{\text{анализ показывает, что человек ВИЧ-инфицирован}\}$

$$P(H_1) = 0,005 \quad P(A | H_1) = 0,99$$

$$P(H_2) = 0,995 \quad P(A | H_2) = 0,01$$

Формулы полной вероятности и Байеса

Пример

При анализе крови на ВИЧ-инфекцию используется тест, который для ВИЧ-положительных людей с вероятностью 0,99, показывает, что человек инфицирован, а для ВИЧ-отрицательных с вероятностью 0,99 показывает, что человек не инфицирован. Человек сдал анализ и тест показал, что он ВИЧ-инфицированный. С какой вероятностью он действительно ВИЧ-инфицированный?

$H_1 = \{\text{человек ВИЧ-инфицирован}\}$

$H_2 = \{\text{человек не ВИЧ-инфицирован}\}$

$A = \{\text{анализ показывает, что человек ВИЧ-инфицирован}\}$

$$P(H_1) = 0,005 \quad P(A | H_1) = 0,99$$

$$P(H_2) = 0,995 \quad P(A | H_2) = 0,01$$

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2)$$

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(A)}$$

Схема Бернулли

Пусть есть опыт с двумя возможными исходами «успехом» и «неудачей». Говорят, что проводится эксперимент по схеме Бернулли, если такой опыт повторяется несколько раз при соблюдении двух условий

- исходы опытов не зависят друг от друга
- вероятности «успеха» и «неудачи» от опыта к опыту не меняются.

Формула Бернулли

Вероятность того, что в серии из n опытов по схеме Бернулли с вероятностью успеха p произойдёт ровно k успехов равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Схема Бернулли

Пример

Стрелок стреляет по мишени до третьего промаха. С какой вероятностью он сделает ровно семь выстрелов, если вероятность поразить мишень при каждом выстреле равна 0,8.

Схема Бернулли

Пример

Стрелок стреляет по мишени до третьего промаха. С какой вероятностью он сделает ровно семь выстрелов, если вероятность поразить мишень при каждом выстреле равна 0,8.

$$P(A) = P_6(2) \cdot 0,2 = C_6^2 0,2^2 (1 - 0,2)^{6-2} 0,2$$

**Спасибо
за внимание!**

