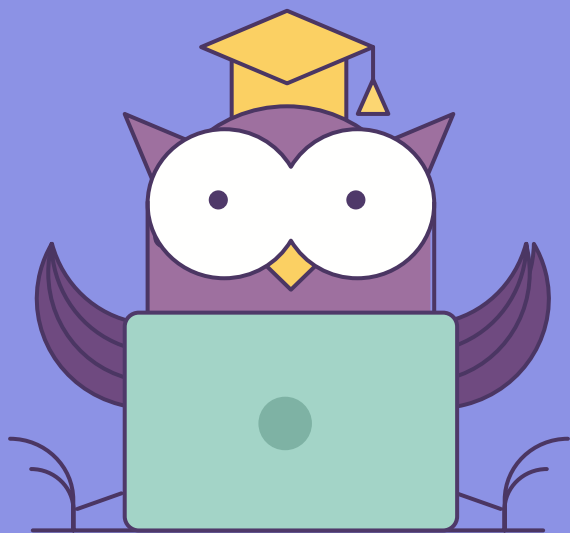




ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

# Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте  если все хорошо

# Теория рядов

Часть 1.

Понятие ряда.

Область сходимости.

Основные свойства рядов.





- Заканчиваю механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова
- Учился в Техносфере от Mail.Ru Group
- Являюсь ментором в Техносфере
- Работаю программистом-исследователем в Mail.Ru Group
- Веду лекции открытого курса [mlcourse.ai](https://mlcourse.ai)



Активно участвуем



Задаем вопросы в чат



Off-topic обсуждаем в Slack



Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

После занятия вы сможете:

**1** Понять что такое ряды.

**2** Разобраться с областью сходимости ряда.

**3** Понять различные свойства рядов.

**Определение.** Рядом будем называть бесконечную сумму.

**Обозначение.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

**Определение.**  $a_1$  - это член ряда.  $a_n$  -  $n$ -ый или общий член ряда.

**Определения.** Если члены ряда:

- числа, то ряд называется числовым
- числа одного знака, то ряд называется знакопостоянным
- положительные числа, то ряд называется знакоположительным
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется знакочередующимся
- степени одной переменной  $x$ , то ряд называется степенным
- тригонометрические функции, то ряд называется тригонометрическим

## Примеры

- Числовой ряд  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$
- Знакопостоянный ряд  $-1 - 2 - 3 - 4 - \dots - n - \dots$
- Знакоположительный ряд  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$
- Знакопередающий ряд  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n + \dots$
- Степенной ряд  $x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$
- Тригонометрический ряд  $\sin(\pi) + \sin(2\pi) + \sin(3\pi) + \dots + \sin(n\pi) + \dots$



**Определение.** Частичными суммами ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называются суммы вида:

- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

**Утверждение.** Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$

**Определение.** Если последовательность частичных сумм имеет предел, то ряд называется сходящимся, а число  $S$  пределом ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S$$

**Определение.** Если при неограниченном возрастании  $n$  последовательность частичных сумм не имеет предела, то такой ряд называется расходящимся.

**Определение.** Разность  $r_n = S - S_n$  называется остатком ряда.

**Утверждение.** Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

**Определение.** Ряд называется геометрическим, если имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

**Определение.** Геометрический ряд образован членами геометрической прогрессии.

**Утверждение.** Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии (частичная  $n$ -сумма) равна  $S_n = \frac{a-aq^n}{1-q}$

**Утверждение.** Геометрический ряд сходится только при  $|q| < 1$  и ряд сходится к значению  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$

**Свойства.** Пусть заданы 2 сходящихся ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Тогда:

- Их суммой называется ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
- Их разностью называется ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$
- Их произведением Коши называется ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

**Утверждение.** Если оба ряда сходятся, то их разность и сумма тоже сходятся.

**Определение.** Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его членов, то есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Свойство.** Абсолютно сходящийся ряд сходится и в обычном смысле этого понятия.

**Определение.** Если числовой ряд сходится, но не абсолютно, то он называется условно сходящимся.

**Свойства.** Если ряд сходится условно, то как ряд из его положительных членов, так и ряд из его отрицательных членов расходится.

**Критерий абсолютной сходимости.** Ряд из вещественных чисел сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся как ряд из положительных его членов, так и из отрицательных.

**Свойство.** Сумма или разность рядов сходится абсолютно, если оба ряда сходятся абсолютно.

**Свойство.** Если хотя бы один из рядов сходится абсолютно, то произведение Коши тоже сходится.

**Теорема (Римана об условно сходящихся рядах).**

Пусть дан числовой ряд, который является условно сходящимся. Тогда для заранее выбранного числа  $A$  можно найти такую перестановку элементов ряда, что сумма нового ряда будет равна  $A$ .

**Пример.**

- Ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  сходится условно к  $\ln(2)$
- Ряд  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \dots$  сходятся условно к  $\ln(2) + \frac{\ln \frac{2}{3}}{2}$
- Если суммировать этот ряд в таком порядке: сначала  $n$  нечетных, потом  $m$  четных и опять  $n$  нечетных и тп. Тогда сумма ряда будет равна:  $\ln(2) + \frac{\ln \frac{n}{m}}{2}$

**Определение.** Ряд, членами которого являются функции от  $x$ , называются функциональным:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \dots + a_n(x) + \dots$$

Подставляя вместо  $x$  определенные значения получаем числовой ряд.

**Определение.** Если в точке  $x_0$  ряд сходится, то точка  $x_0$  является точкой сходимости функционального ряда. Если же ряд в точке  $x_0$  расходится, то точкой расходимости функционального ряда.

**Определение.** Совокупность числовых значений аргумента  $x$ , при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.

**Задача.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Ответ:  $|x| < 1$

**Определение.** Степенным рядом от одной переменной называется функциональный ряд вида:  $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$

**Теорема (первая теорема Абеля).**

Если ряд сходится в точке  $x_0$  то ряд сходится абсолютно в круге  $|x| < |x_0|$

**Определение.** Число  $R$  называется радиусом сходимости степенного ряда, если в области  $|x| < R$  ряд сходится абсолютно, а в области  $|x| > R$  ряд расходится.

**Теорема (Формула Коши-Адамара).**

Значение радиуса сходимости степенного ряда может быть вычислена по формуле:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$



# Есть вопросы или замечания?



Напишите в чат свои вопросы и замечания!

Ставьте  если все понятно



# АНТОН ЛОСКУТОВ

Slack:

@LoskutovAnton

# Пройдите опрос



Помогите нам стать лучше!  
<https://otus.ru/polls/5938/>

**Спасибо  
за внимание!**

