OTUS

ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

# Введение 2

Базовые термины математического анализа.
Базовые термины теории вероятности.
Настраиваем окружение python.

Лоскутов Антон Алексеевич

# Меня хорошо слышно && видно?

Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте + если все хорошо

# Знакомство

- Заканчиваю механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова
- Учился в Техносфере от Mail.Ru Group
- Являюсь ментором в Техносфере
- Работаю программистом-исследователем в Mail.Ru Group
- Веду лекции открытого курса ODS

# Правила вебинара

OTUS

Активно участвуем

Задаем вопросы в чат

Off-topic обсуждаем в Slack **#mathfords-2019-07** или **#general**

Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

# Цели занятия

После занятия вы сможете:

1. Вспомним основные определения из математического анализа и теории вероятностей, чтобы решить несколько простых задач.

2. Установим и настроим Python и окружение для дальнейшего использования.

3. Попробуем воспользоваться стандартными пакетами из окружения Python и увидеть на примерах зачем нам нужен Python.

# Содержание занятия

- Пределы
  - Предел последовательности и функции
  - Свойства пределов и замечательные пределы
  - Примеры пределов
- Свойства функции
  - Непрерывность функции и точки разрыва
  - Производная функции и матричные производные
  - Дифференциал для многомерного случая
- Ряд Тейлора
  - Многочлен Тейлора и ряд Маклорена
  - Примеры
- Вероятность
  - Определение и свойства
  - Случайная величина
  - Функции плотности и распределения
  - Математическое ожидание, дисперсия и моменты
- Настройка окружения Python
  - Настройка окружения с помощью Anaconda
  - Основные команды
  - Применение Python

# Собственные числа

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите собственные значение, а затем и собственные вектора матрицы $A$.

Ответ: Собственные значения **(-2; 2; 4)**

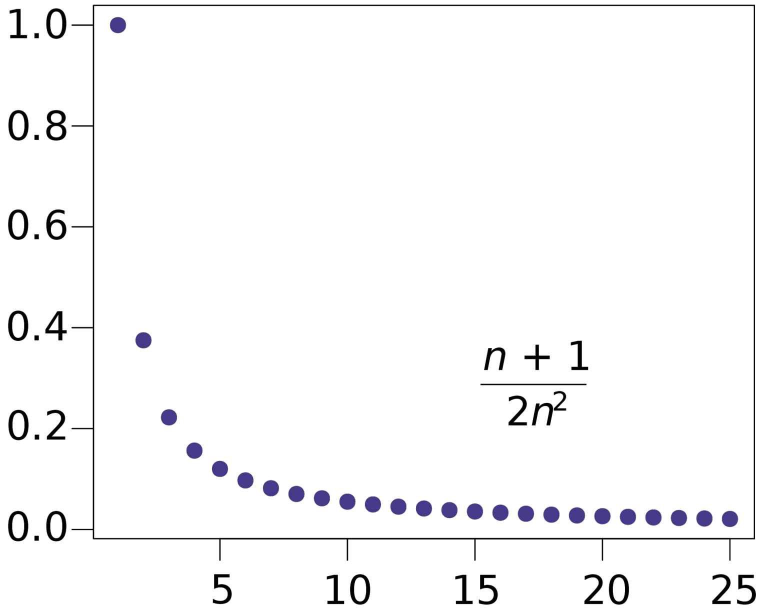
Собственные вектора: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

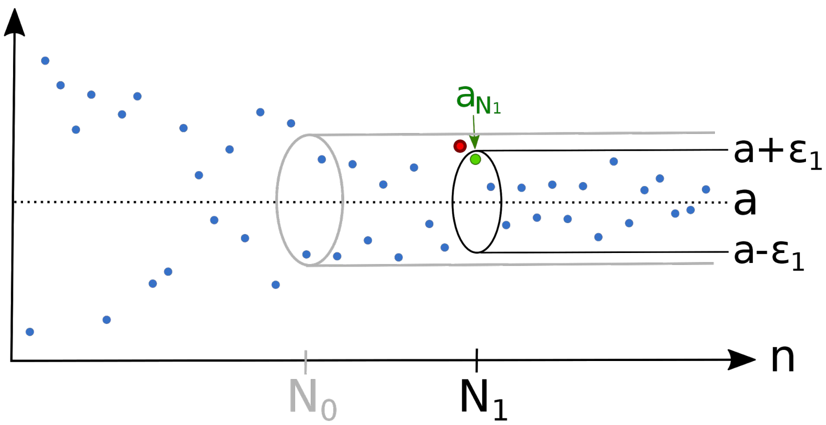
# Предел последовательности



**Определение.** Число *a* называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если все элементы, начиная с некоторого, по модулю меньше любого заранее заданного числа.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\ n \geqslant N\ \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$



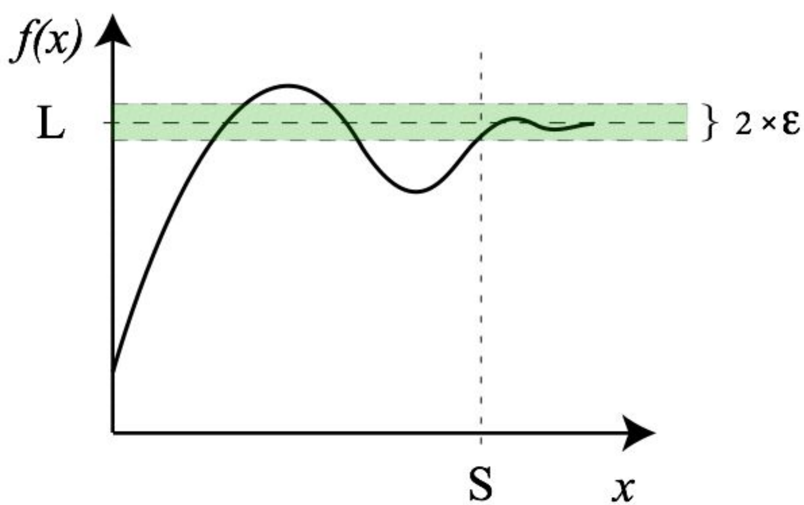



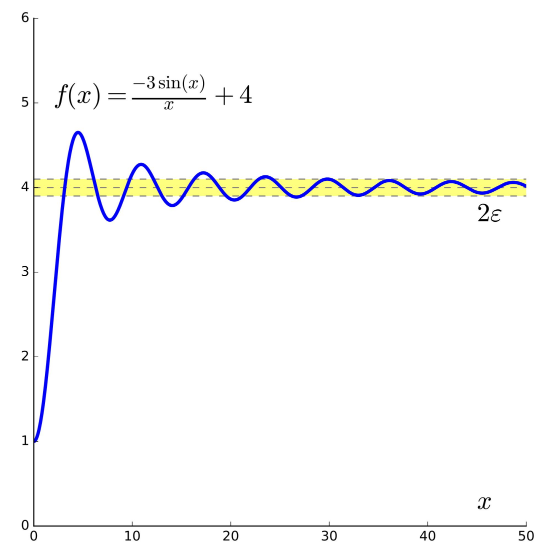
# Предел функции

**Определение (по Гейне).** Значение $A$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, если для любой последовательности точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к $x_0$, но не содержащей $x_0$ в качестве одного из своих элементов, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к A

**Определение (по Коши).** Значение $A$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, если выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



# Свойства предела функции

1. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = A + B\right)$
2. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B\right)$
3. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}\right)$

# Свойства предела функции

1. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = A + B\right)$
2. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B\right)$
3. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}\right)$

**Теорема (о 2 милиционерах).** Если функция $y=f(x)$ такая, что $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x$ в некоторой окрестности точки $a$, причем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют одинаковый предел равный $A$ при $x \to a$, то:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

**Определение.** Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

**Определение.** Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

# Интерактив

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2+4x+1} =$

- $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{3x})^{4x} =$

# Предел функции (примеры)

OTUS

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2+4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\cancel{\frac{x}{x^2}}^{0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}}{\frac{2x^2}{x^2}+\cancel{\frac{4x}{x^2}}^{0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{4x}{3x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} =$$
$$e^{\frac{4}{3}}$$

# Классное задание

- $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+7x+100}{2x^2-17x-3} =$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{10000x^2}{x^3-300000} =$

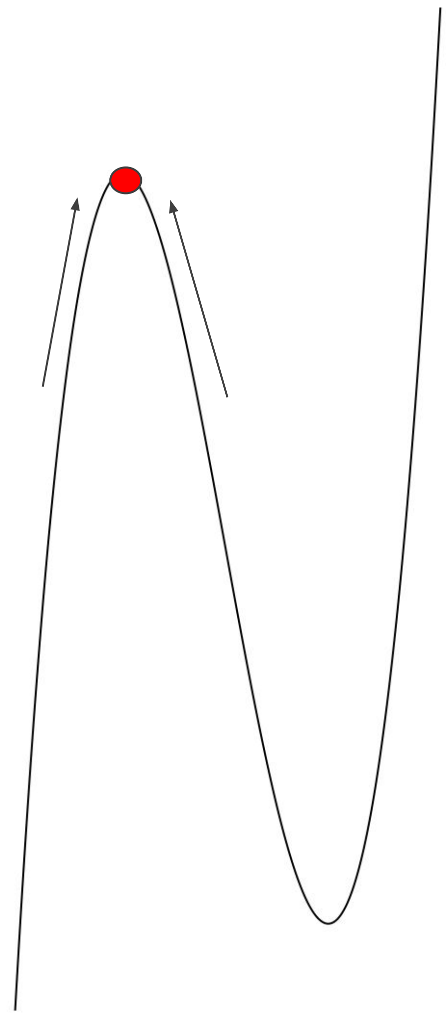
- $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+7x+100+sin(x)}{2x^2-17x-3} =$

# Непрерывность функции

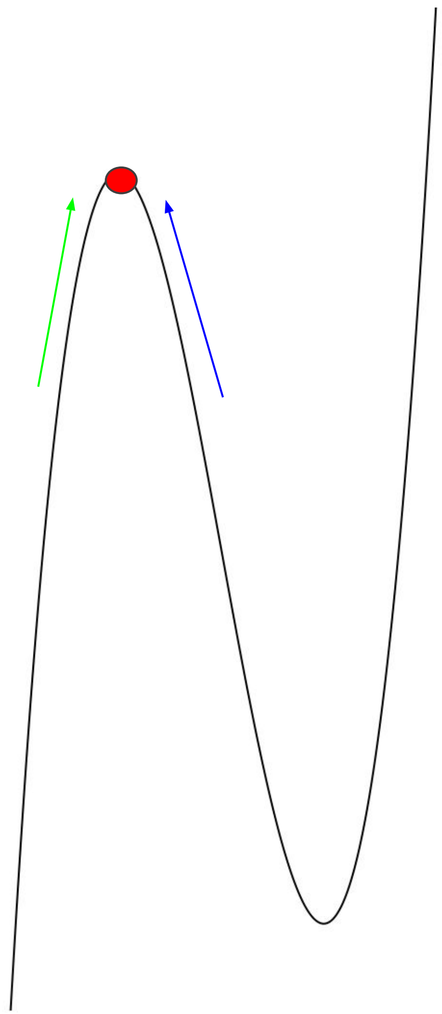
**Определение.** Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0$ и он совпадает со значением $f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

# Односторонние пределы



# Односторонние пределы



$$\lim_{x \to x_0-} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x)$$

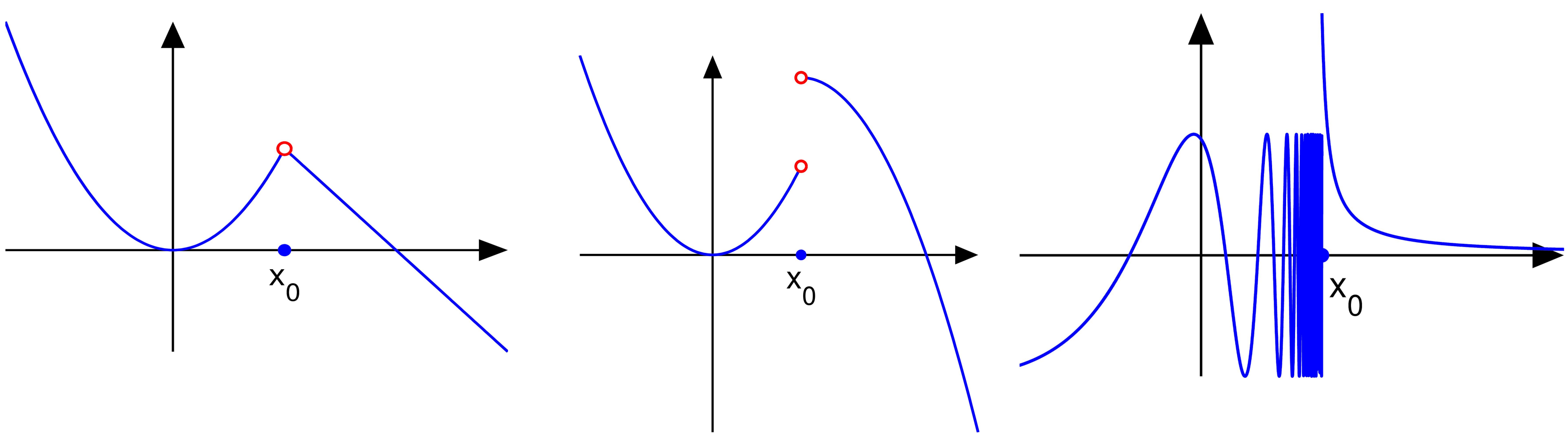
# Точки разрыва

**Определение.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

**Точка разрыва 1 рода.** Оба односторонних предела существуют и конечны.

**Точка разрыва 2 рода.** Хотя бы один из односторонних пределов не существует или не является конечной величиной.




Разрыв 1 рода          Разрыв 1 рода          Разрыв 2 рода

# Производная

**Определение.** Если в некоторой окрестности точки $x_0$ определена функция $f(x)$, то производной функции называется предел:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Правила дифференцирования**

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(f+g)' = f' + g'$
4. $(fg)' = f'g + fg'$
5. $(\frac{f}{g}) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

**Таблица производных**

1. $x^n = nx^{n-1}$
2. $c^x = c^x ln(c)$
3. $\ln_c x = \frac{1}{x\ lna}$
4. $sin(x) = cos(x)$
5. $arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

# Матричные производные

## Определения

1. $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = [\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_d}]^T$

2. $\left(\frac{\partial f(A)}{\partial A}\right)_{ij} = \frac{\partial f(A)}{\partial a_{ij}}$

3. $\frac{\partial \boldsymbol{f}(x)}{\partial x} = [\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f_d(x)}{\partial x}]^T$

4. $\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x}$

## Свойства

1. $\frac{\partial}{\partial A} tr(AB) = B^T$
2. $\frac{\partial}{\partial A} det(A) = (det(A))(A^{-1})^T$
3. $\frac{\partial}{\partial x} log(det(A(x))) = tr(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x})$
4. $\frac{\partial}{\partial x} x^T a = a$
5. $\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = (A + A^T)x$
6. $\frac{\partial}{\partial A} x^T A y = x y^T$
7. $\frac{\partial}{\partial x} A^{-1} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1}$

# Дифференциал функции для многомерного случая

**Определение.** Дифференциалом функции $f(x)$ в некоторой точке $x_0$ называется главная(линейная) часть приращения функции.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a^i (x^i - x_0^i) + o(\|x - x_0\|)$$

**Дифференциалом** функции тогда назовем: $A(x - x_0) = \sum_{i=1}^{n} a^i (x^i - x_0^i)$

Числа $a^1, \ldots, a^n$ называются частными производными и равны:

$$a^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

# Ряд Тейлора

**Определение.** Многочленом Тейлора функции $f(x)$ вещественной переменной $x$, дифференцируемой $k$ раз в точке $a$ называется функция:

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

**Определение.** Если функция f(x) бесконечно дифференцируема, то многочлен Тейлора называется рядом Тейлора.

**Определение.** Если $a = 0$, то ряд Тейлора называется рядом Маклорена.

**Определение.** Если функция $f(x)$ имеет $\mathrm{n+1}$ производную на отрезке $[a; x]$, то для произвольного положительного числа $p$ найдется точка $\xi$, лежащая между $a$ и $x$, такая что:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

# Примеры рядов Маклорена

OTUS

- $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{C}$$
- $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad -1 < x \le 1$$
- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n) n!^2 4^n} x^n \qquad |x| \le 1$$
- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$
- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{C}$$

# Пример на ряд Тейлора

Условие: $x \to 0$

$$(1 + x^2 + O(x^4)) * (x + O(x^3)) =$$

$$x + O(x^3) + x^3 + x^2 O(x^3) + xO(x^4) + O(x^4)O(x^3)$$

$$= x + O(x^3)$$

## Классное задание

Условие: $x \to 0$

- $(1 + x) * (x + O(x^3)) =$
- $(1 + x^3 + O(x^7)) * (x^2 + O(x^7)) =$
- $(1 + x + O(x^2)) * (1 + sin(x) + O(x^3)) =$

# Вероятность

**Определение (через предел).** *Вероятностью случайного события* A *называется отношение числа* n *несовместимых равновероятных элементарных событий, составляющих событие* A, *к числу всех возможных элементарных событий* N: $P(A) = \frac{n}{N}$

**Определение (через основную тройку, как функцию).** Вероятностным пространством назовем совокупность $(X, \Omega, P)$ – то есть множество элементарных событий, сигма-алгебру его подмножеств и вероятностную меру.

**Определение.** Вероятностной мерой $P$ назовем числовую функцию, заданную на множестве элементарных событий со следующими свойствами:

- Неотрицательность: $\forall A \subset X \colon \mathbf{P}(A) \geqslant 0$
- Аддитивность: Если $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(A_i)$
- Конечность: $\mathbf{P}(X) = 1$

# Свойства вероятности

1. $\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$
2. Если $A \subset B$, то $\mathbf{P}\{A\} \leqslant \mathbf{P}\{B\}$
3. $0 \leqslant \mathbf{P}\{A\} \leqslant 1$
4. $\mathbf{P}\{B \setminus A\} = \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A\}$, если $A \subset B$
5. $\mathbf{P}\{\bar{A}\} = 1 - \mathbf{P}\{A\}$
6. $\mathbf{P}\{A + B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{AB\}$
7. Два случайных события называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. Аналогично, две случайные величины называют **независимыми**, если известное значение одной из них не дает информации о другой.

# Случайная величина

**Определение.** Случайной величиной назовем функцию “случая”, которая задана на пространстве элементарных событий.

**Пусть пространство событий представляют собой числовую прямую, а сигма-алгеброй подмножеств будут являться произвольные интервалы на числовой прямой.**

**Определение.** Для каждого интервала вида $(-\infty; x)$ поставим в соответствие некоторую вероятность: $F(x) = P(X < x)$. Такую функцию назовем функцией распределения.

**Определение.** Если у функция распределения является дифференцируемой, то введем функцию плотности распределения $f(x)$, которая будем равна производной от функции распределения.

**Определение.** В случае дискретного пространства событий функцией распределения назовем величину:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

# Математическое ожидание

**Обозначение.** $M[X]$

**Определение.** Среднее значение случайной величины при стремлении количества выборок или количества испытаний к бесконечности.

**Определение.** Если случайная величина абсолютно непрерывна, то

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x); x \in \mathbb{R}.$$

**Определение.** Если случайная величина дискретна, то

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$$

# Свойства математического ожидания

1. $M[a] = a$ если $a \in \mathbb{R}$
2. $M[aX + bY] = aM[X] + bM[Y]$
3. Если $0 \leqslant X \leqslant Y$, то $0 \leqslant M[X] \leqslant M[Y]$
4. Если *X* и *Y* - независимые случайные величины, то $M[XY] = M[X]M[Y]$
5. $M\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$

# Классное задание

- Пусть задана дискретная случайная величина следующей таблицей. Надо найти математическое ожидание.

| **x** | -5 | -1 | 1 | 2 | 5 | 9 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P(X < x)** | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.4 | 0.1 | 0.07 | 0.03 |

- Пусть случайная величина $Y \sim U(1,4)$. Найти $M[Y]$.
- Пусть случайная величина $Y \sim U(1,4) + X$, где $X \sim U^3(1,4)$. Найти $M[Y]$.

# Дисперсия

**Определение.** Мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

**Определение.** $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$

**Определение.** Если случайная величина $X$ абсолютно непрерывна:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx,$$

$$D[X] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - x_1)^2 f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2$$

**Определение.** Если случайная величина $X$ дискретна

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - M[X])^2,$$

$$D[X] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} p_i p_j (x_i - x_j)^2,$$

# Свойства дисперсии

1. $D[X] \geqslant 0$;
2. Если дисперсия случайной величины конечна, то конечно и её математическое ожидание.
3. Если случайная величина равна константе, то ее дисперсия равна нулю. Верно и обратное.
4. $D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2\operatorname{cov}(X,Y)$
5. $D\left[X+b\right] = D[X]$
6. $D\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D[X_i] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} c_i c_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$

- Пусть задана дискретная случайная величина следующей таблицей. Надо найти дисперсию.

| x | -5 | -1 | 1 | 2 | 5 | 9 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X < x) | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.4 | 0.1 | 0.07 | 0.03 |

- Пусть случайная величина $Y \sim U(1,4)$. Найти $D[Y]$.
- Пусть случайная величина $Y \sim U(1,4) + X$, где $X \sim U^3(1,4)$. Найти $D[Y]$.

# Моменты случайной величины

OTUS

**Определение.** $k$-м моментом случайной величины $X$ является $M[X^k]$

**Определение (коэффициент асимметрии).** Величина, характеризующая асимметрию распределения распределения данной случайной величины.

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

Положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае.

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то его коэффициент асимметрии равен нулю.

**Определение (коэффициент эксцесса).** Мера остроты пика распределения случайной величины.

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

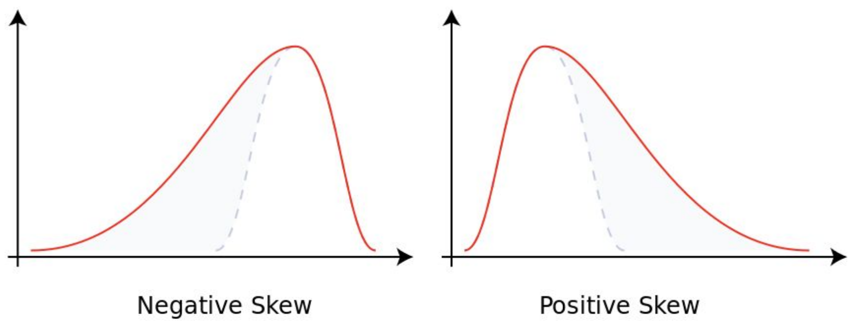
«Минус три» в конце формулы введено для того, чтобы коэффициент эксцесса стандартного нормального распределения был равен нулю. Он положителен, если пик распределения около математического ожидания острый, и отрицателен, если пик очень гладкий.

# Интерактив

**Определение (момент).** Числовая характеристика распределения данной случайной величины.

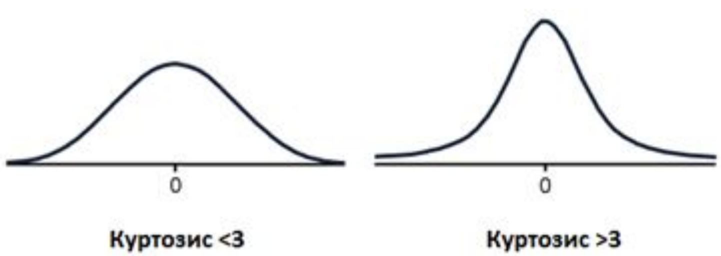
**Определение (коэффициент асимметрии).** Величина, характеризующая асимметрию распределения распределения данной случайной величины.

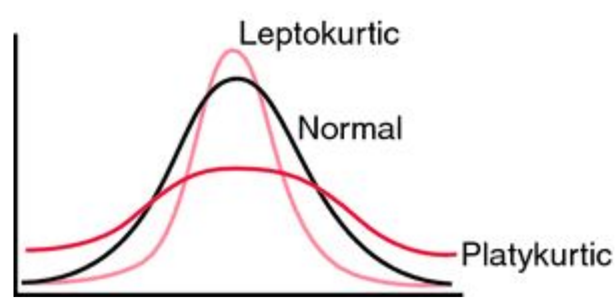
**Определение (геометрический смысл).**




**Определение (коэффициент эксцесса).** Мера остроты пика распределения случайной величины.

**Определение (геометрический смысл).**



# Восстановление распределения

**Определение (Метод моментов).** Метод оценивания неизвестного параметра, основанный на свойствах моментов.

**Определение (Метод максимального правдоподобия).** Метод оценивания неизвестного параметра путем максимизации функции правдоподобия.

**Определение (Метод наименьших квадратов).** Основан на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных.

# Установка Anaconda

OTUS

Шаги для установки Anaconda.

1 Перейти на сайт Anaconda: https://www.anaconda.com/download/

2 Выбрать операционную систему, которая стоит у вас на компьютере (Windows, Linux или MacOS)

3 Скачать соответствующий разрядности Вашего процессора (32 бит или 64 бит) вариант Anaconda

# Настройка окружения через Anaconda

1. Создать новое окружение:

   `conda create --name test_env python=3.6`

2. Посмотреть уже созданные окружения:

   `conda info --envs`

3. Активировать окружение:

   `conda activate test_env`

4. Выйти из окружения в изначальное (базовое):

   `conda activate`

5. Установить новый пакет:

   `conda install beautifulsoup4`

6. Посмотреть все установленные пакеты:

   `conda list`

7. Обновить пакет:

   `conda update beautifulsoup4`

# Стандартные пакеты

В пакете **numpy** есть все необходимые функции для вычисления стандартных свойств случайных величин, например:

- **Математическое ожидание**: `np.mean(x)`
- **Дисперсия:** `np.var(x)`
- **Стандартное отклонение**: `np.std(x)`
- **Момент второго порядка**: `np.mean(np.square(x))`
- Генерация выборки с помощью модуля np.random
- **Определитель:** `np.linalg.det(x)`
- **Собственные числа:** `np.linalg.eigvals(x)`

В пакете **scipy** есть оптимизаторы - функции, которые применяют методы подбора параметров с помощью различных техник, в том числе с помощью МНК.

# Проблемы вычислений в Python

OTUS

```
import numpy as np                    # Импортируем библиотеку numpy

start_arr = np.random.randint(-9, 9, 9999) # Генерируем случайную первую колонку
tmp_arr = start_arr
mat = [np.ones_like(start_arr),
      start_arr.ravel().tolist()]        # Генерируем переменную с матрицей
for _ in range(9997):                    # Делаем цикл по оставшимся 9997 колонкам
   tmp_arr = tmp_arr * start_arr         # Генерируем следующей колонку
   mat.append(tmp_arr.ravel().tolist())  # Добавляем новую колонку в матрицу
mat = np.array(mat).T                    # Переводим список в np.array и транспонируем
print(np.linalg.det(mat))                # Печатаем значение определителя
```

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Вычисление с помощью средств Python может занимать достаточно большое количество времени и страдает проблемами в виде переполнения переменных, например. Но если знать математические подходы, то некоторые задачи решаются быстро и без использования программирования. Выше показан пример с матрицей Вандермонда.

# Материалы

OTUS

1. Математический анализ
   a. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. **Лекции по математическому анализу.**
      *Большая книга, но в ней есть все, что может пригодиться по математическому анализу*
   b. **Заметки по матричным вычислениям и нормальному распределению.**
      http://www.machinelearning.ru/wiki/images/2/2a/Matrix-Gauss.pdf
      *Небольшой конспект по матричным производным.*
2. Теория вероятностей
   a. Владимир Савельев. **Статистика и котики.**
      Небольшая книга по статистике, где разобраны достаточно простые случае, но много картинок с котиками и в более неформальной форме.
   b. Ширяев, А. Н. **Вероятность.**
      *Большая книга, в которой есть все что мы прошли и много всего остального.*

# Есть вопросы или замечания?

Напишите в чат свои вопросы и замечания!

Ставьте + если все понятно

# Антон Лоскутов

Telegram: @LoskutovAnton
Slack: @LoskutovAnton

# Спасибо за внимание!