



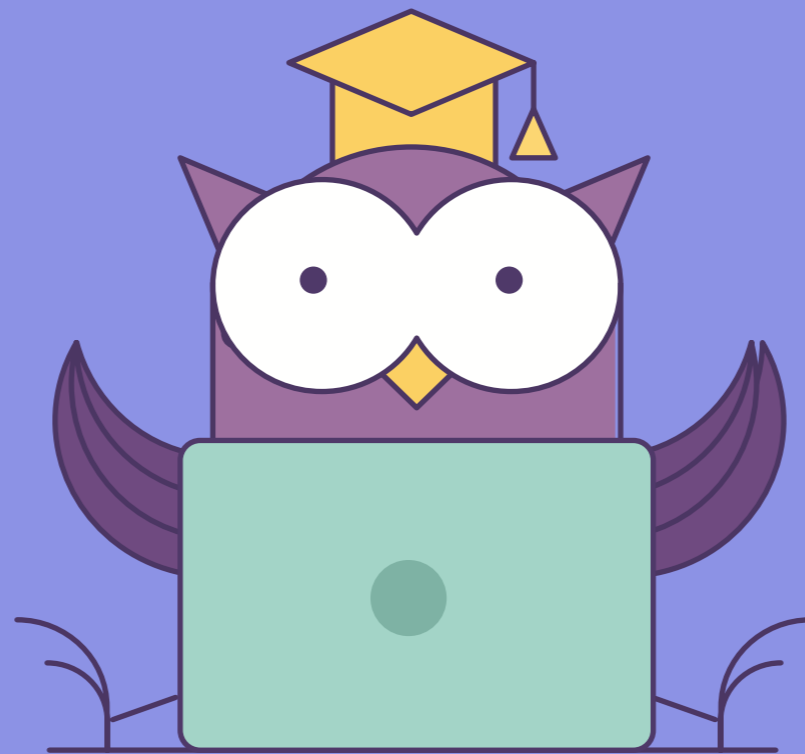
ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

# Линейная алгебра

Геометрическая интерпретация



# Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте  если все хорошо

**Не забыть включить  
запись!!!**



Активно участвуем



Задаем вопросы в чат



Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу



**Иван Леонов**

- \* Data Science Team Lead @ Globant
- \* 4 года в Data Science
- \* >20 лет профессионального опыта (Software Development, Data Architecture, Product & Operations Management)
- \* Работал в AIG, TV Guide, MTV / Viacom, AdoTube, EPAM
- \* Образование: University of Chicago, BS, Mathematics

- **Линейная зависимость**
  - Ранг, базис, размерность
  - Векторные пространства и подпространства
- **Системы линейных уравнений**
  - Картинка столбцов
  - Картинка колонок
- **Определители и обратные матрицы**
  - Геометрический смысл
- **Матричные преобразования**
  - Сохраняющие размерность
  - Меняющие размерность
- **Применение матричных преобразований**
  - Уменьшение размерности
  - Kernel trick

**Вектора:** $(v_1, v_2, \dots, v_k),$ 

линейно зависимы

 $\Leftrightarrow$ 

существуют константы  $c_1, c_2, \dots, c_k$   
не равные одновременно нулю:

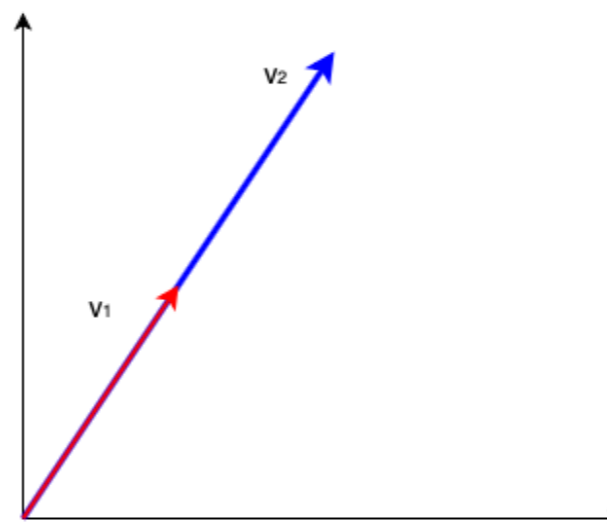
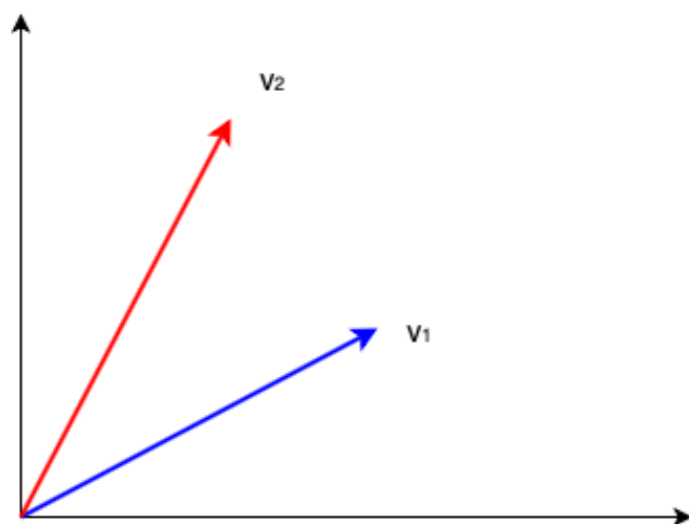
$$c_1 * v_1 + c_2 * v_2 + \dots + c_k * v_k = 0$$

**Пример:**

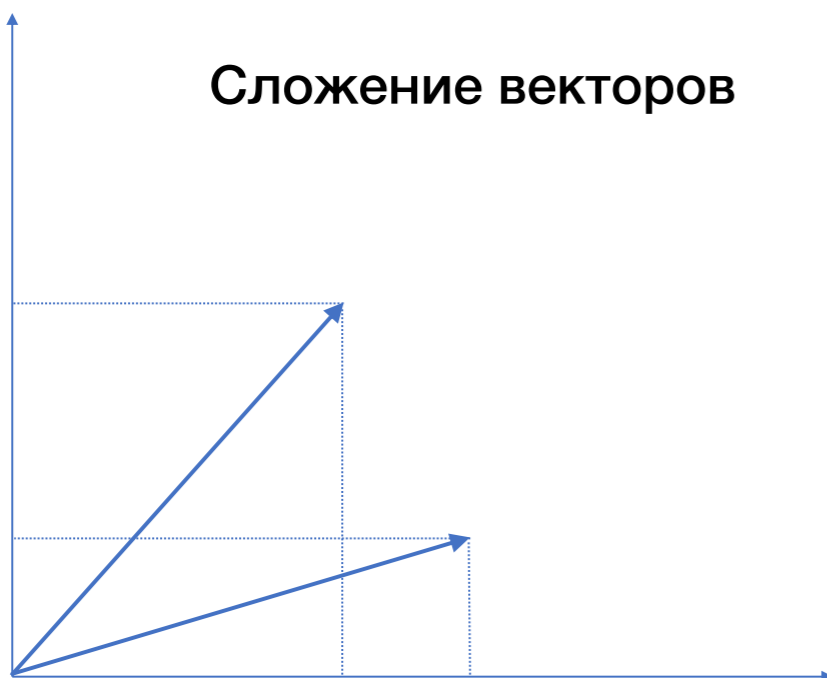
являются ли линейно независимыми вектора:

 $(1, 2)$  и  $(2, 4)$ ? $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ ? $(1, 0), (0, 1), (2, 2)$ ?

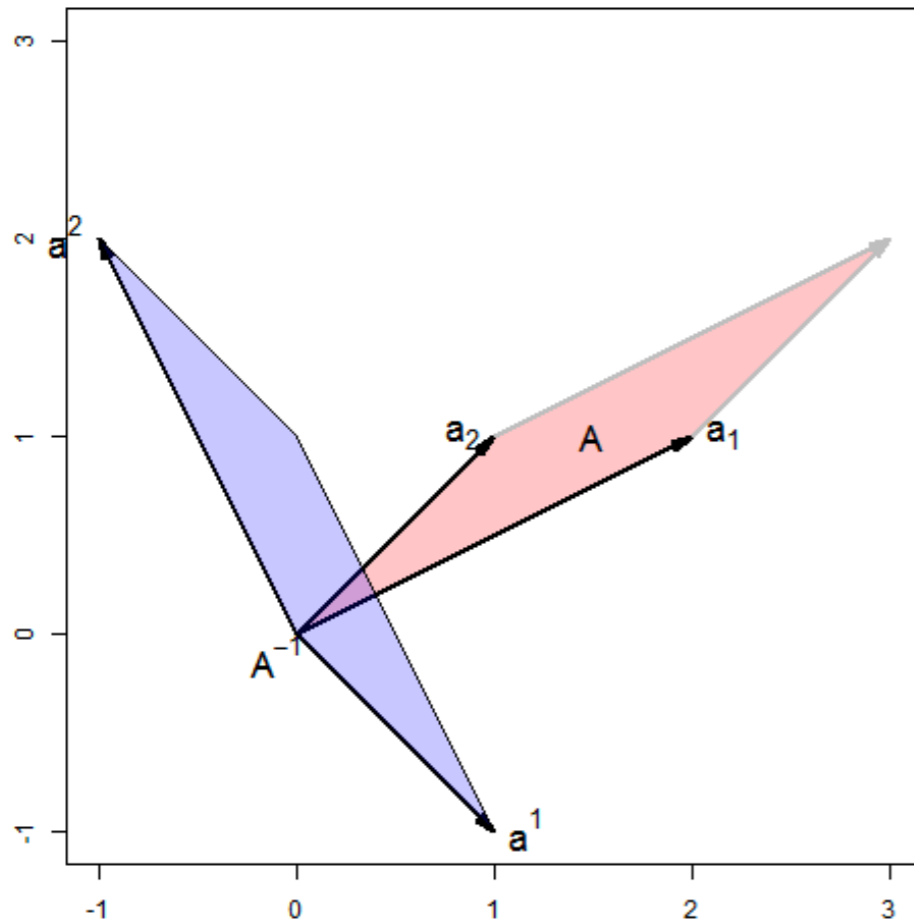
# Линейно независимые вектора



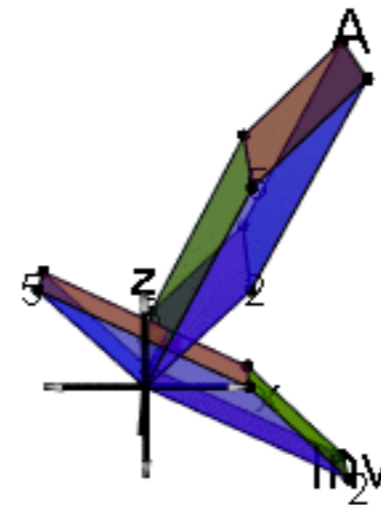
Сложение векторов



# Определитель матрицы. Обратная матрица



$\det A = \text{площадь параллелограмма}$   
 $\det A^{-1} = 1 / (\det A)$



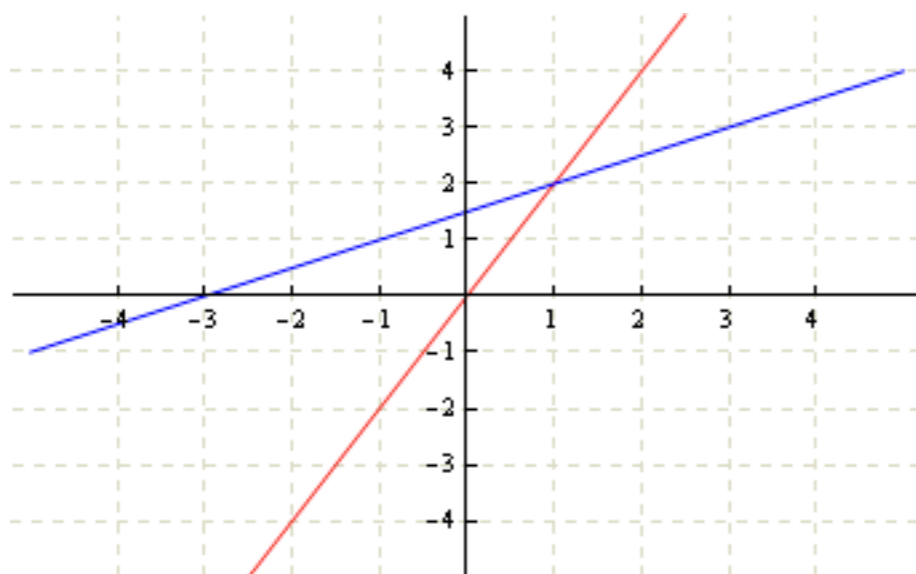
# Системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3\end{aligned}$$

# Системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3\end{aligned}$$

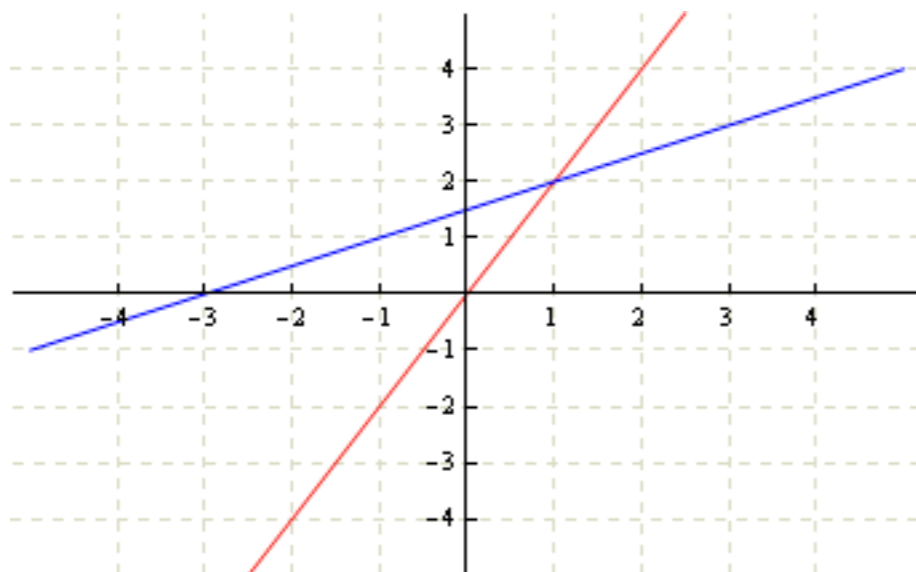
картинка рядов:



# Системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

картинка рядов:



$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

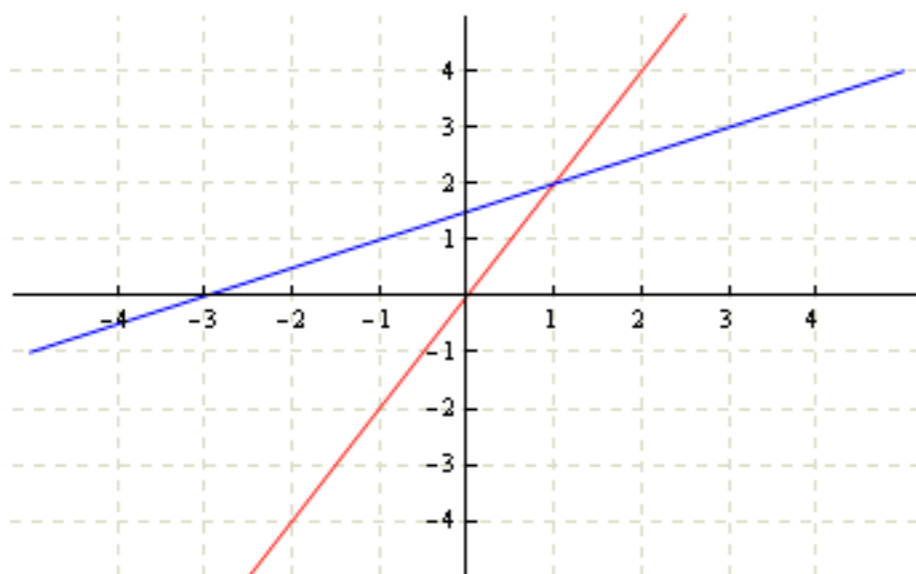
картинка колонок:

# Системы линейных уравнений

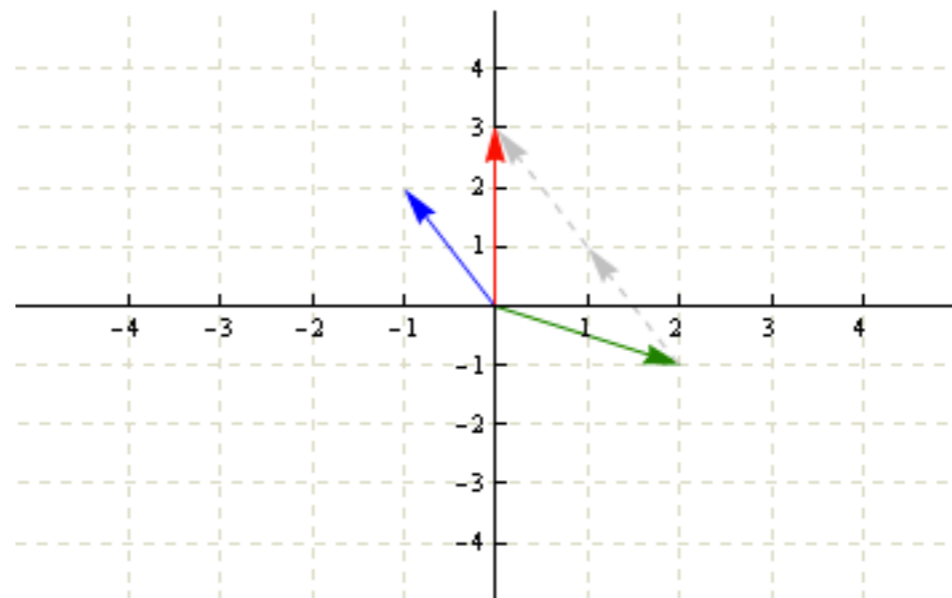
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

картинка рядов:



картинка колонок:

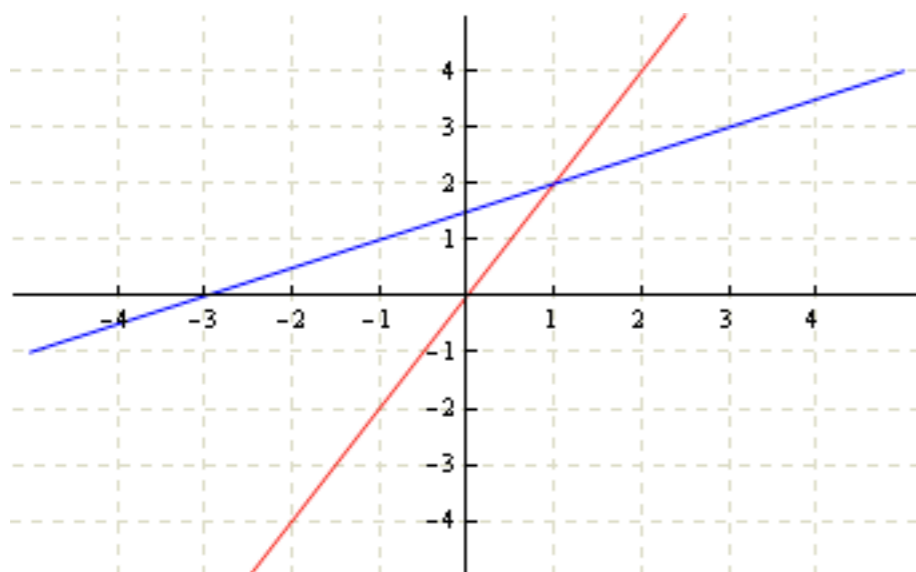


# Системы линейных уравнений

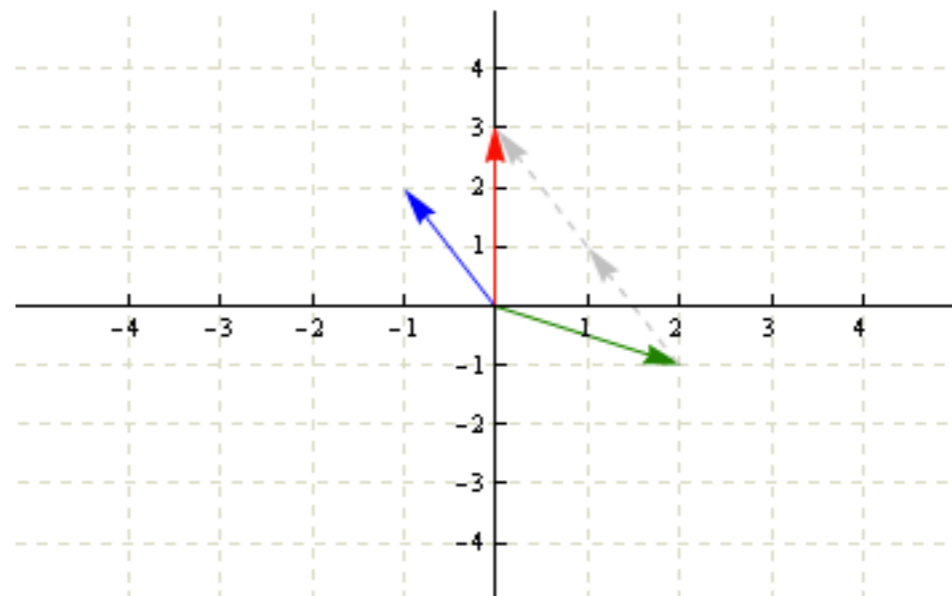
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

картинка рядов:



картинка колонок:



**Матричный вид:**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Системы линейных уравнений

Решение

$$2x + y + w = 1$$

$$4x + y = -2$$

$$-2x + 2y + w = 7$$

# Системы линейных уравнений

## Решение

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{array}$$

Ведущий элемент

$$\begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2 \cdot R_1 \\ R_3 = R_3 - (-1) \cdot R_1 \end{array}$$

# Системы линейных уравнений

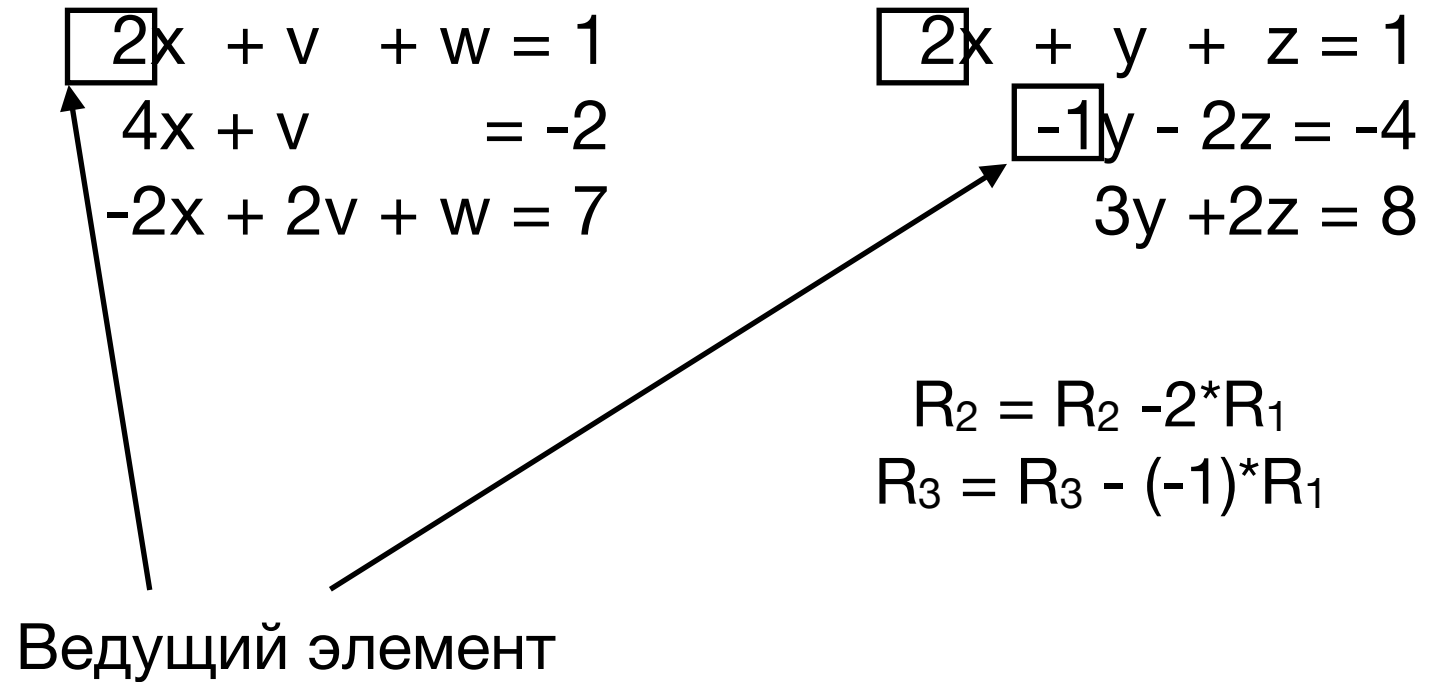
## Решение

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + v + w = 1 \\ 4x + v = -2 \\ -2x + 2v + w = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ \boxed{-1}y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2 \cdot R_1 \\ R_3 = R_3 - (-1) \cdot R_1 \end{array}$$

Ведущий элемент



# Системы линейных уравнений

## Решение

$$\begin{cases} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ \boxed{-1}y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ \boxed{-1}y - 2z = -4 \\ \boxed{-4}z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2 - 2 \cdot R_1 \\ R_3 &= R_3 - (-1) \cdot R_1 \end{aligned}$$

$$R_3 = R_3 - (-3) \cdot R_2$$

Число ведущих элементов: 3

# Системы линейных уравнений

## Решение

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 1 \\4x + y &= -2 \\-2x + 2y + z &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 1 \\-1y - 2z &= -4 \\3y + 2z &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 1 \\-1y - 2z &= -4 \\-4z &= -4\end{aligned}$$



обратная подстановка:

$$x = -1 \longleftarrow 2x + 2 + 1 = 1 \longleftarrow y = 2 \longleftarrow -1y - 2 = -4 \longleftarrow z = 1$$

ответ:  $(-1, 2, 1)$

# Системы линейных уравнений

## Решение

$$\boxed{2}x + y + z = 1$$

$$4x + 2y + 2z = -2$$

$$-2x - y - z = -1$$

$$\boxed{2}x + y + z = 1$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$R_2 = R_2 - 2 \cdot R_1$$

$$R_3 = R_3 - (-1) \cdot R_1$$

Число ведущих элементов: 1

ответ: все  $(x, y, z)$  такие что  
 $2x + y + z = 1$

# Системы линейных уравнений

## Решение

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -2x - y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ 0 + \boxed{-2}y + 2z = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - (-1) \cdot R_1 \end{array}$$

$$z = y$$

$$2x + 2y = 1$$

Число ведущих элементов: 2

# Системы линейных уравнений

## Решение

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -2x - y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{2}x + y + z = 1 \\ 0 + \boxed{-2}y + 2z = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - (-1) \cdot R_1 \end{array}$$

$$z = y$$

$$2x + 2y = 1$$

Число ведущих элементов: 2

Для прямоугольной матрицы  $m \times n$ , число ненулевых ведущих элементов = ранг матрицы

# Системы линейных уравнений

## Умножение вектора на матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2 + 1 \\ -4 + 2 + 0 \\ 2 + 4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

# Системы линейных уравнений

## Умножение вектора на матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2 + 1 \\ -4 + 2 + 0 \\ 2 + 4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

## Пример

- a) Из тех, кто в начале года жил в Калифорнии, 20% выехали, 80% остались
- b) Из тех, кто в начале года жил НЕ в Калифорнии (в других штатах), 10% переехали в Калифорнию, а 90% нет

Если в начале года в Калифорнии проживало 30 млн, а вне её 200 млн, то какова будет ситуация в конце года?

## Разложение на треугольные матрицы

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример:

Вычислить сомножители  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{U}$  для  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{12}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$$

## Разложение на треугольные матрицы

$$A = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример:

Вычислить сомножители L и U для  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{12}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad A = LDU$$

## Решение СЛАУ

$$Ax = b \longrightarrow \begin{array}{l} Lc = b \\ Ux = c \end{array} \longrightarrow c \longrightarrow Ux = c \longrightarrow x$$

# Системы линейных уравнений

## Векторные пространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

# Системы линейных уравнений

## Векторные пространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

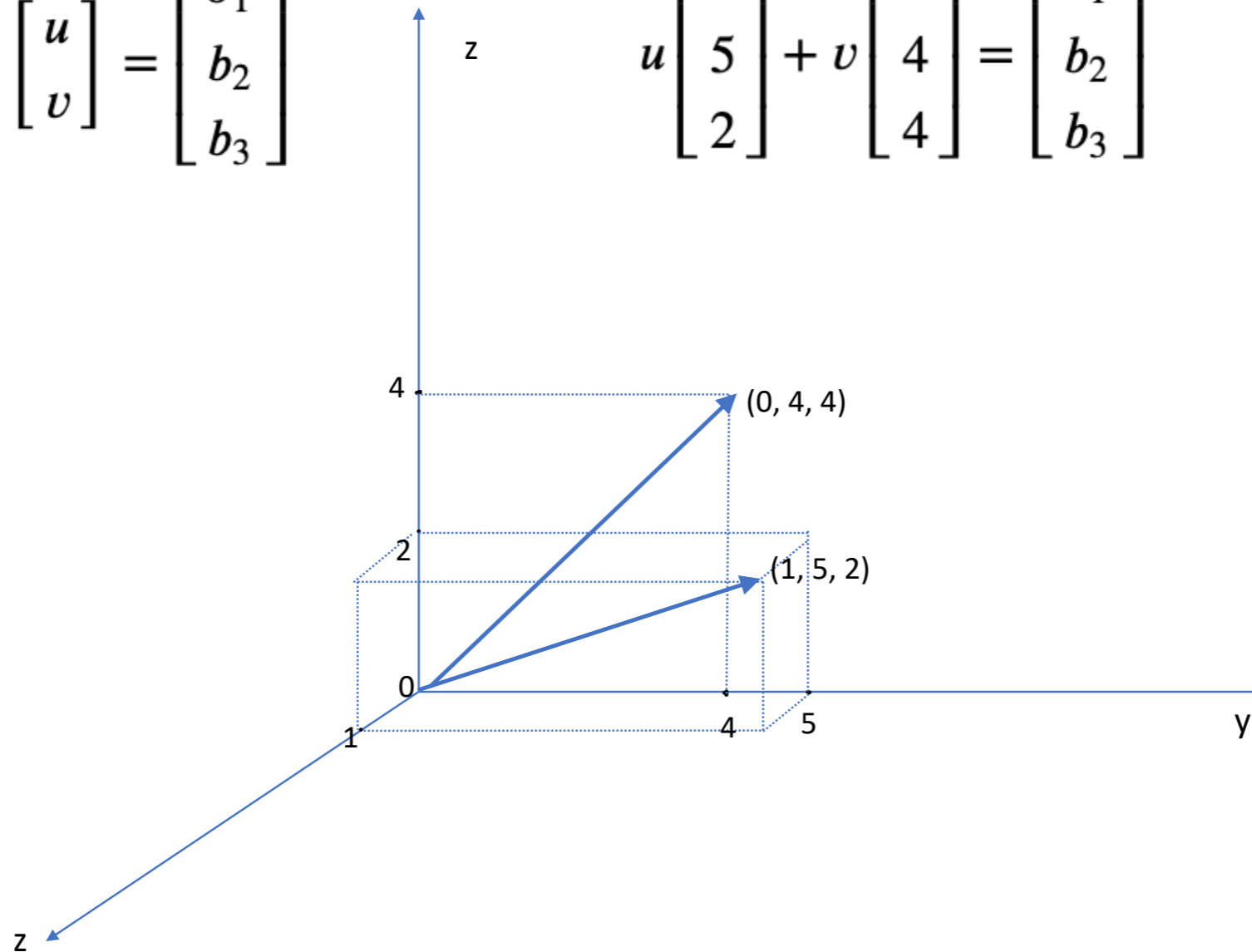
$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

# Системы линейных уравнений

## Векторные пространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



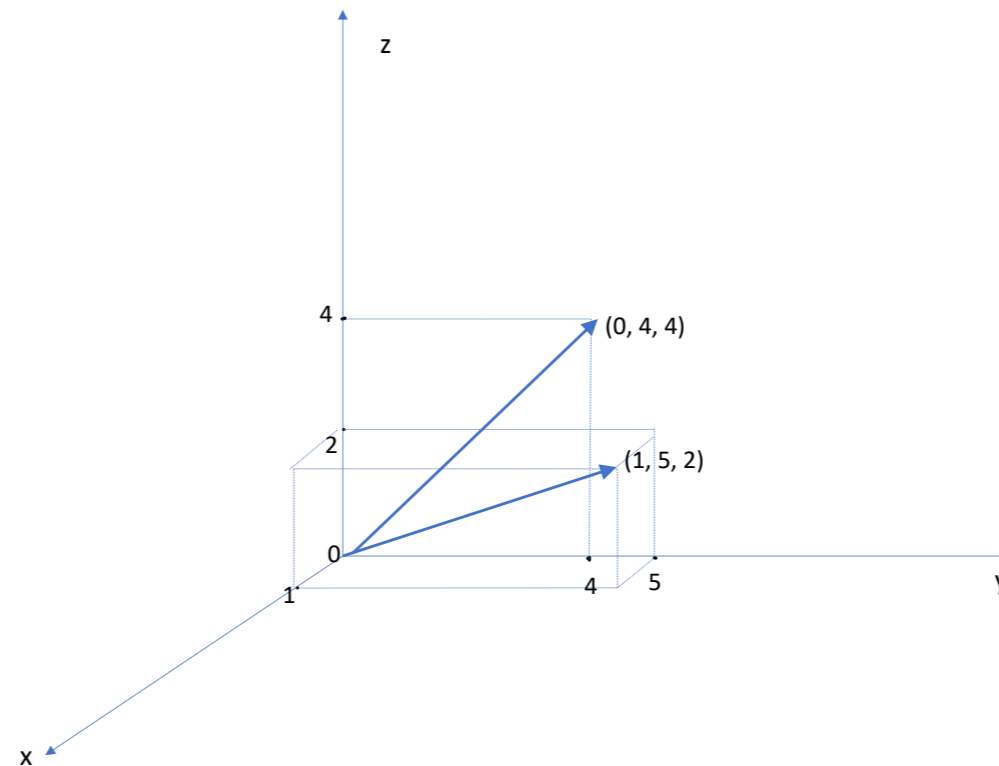
# Системы линейных уравнений

## Векторные пространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

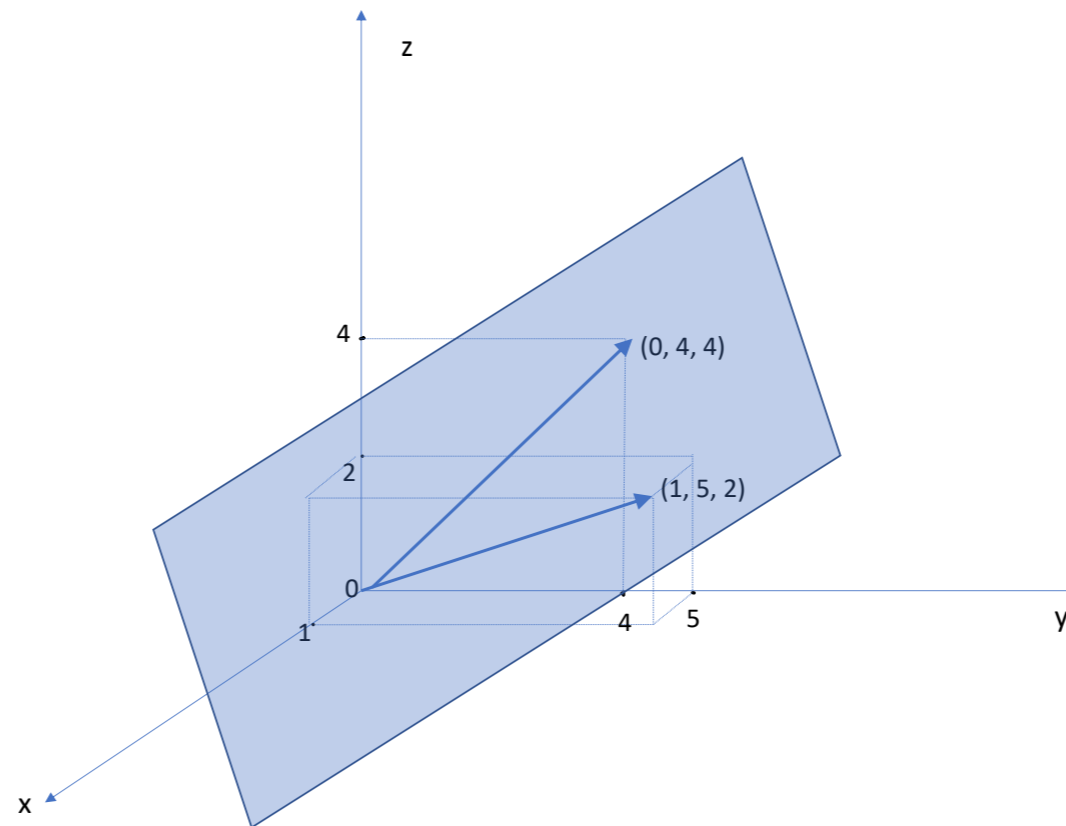
При каких значениях  
 $b_1, b_2, b_3$   
уравнение  $Ax = b$   
имеет решение?



# Системы линейных уравнений

## Векторные пространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



Вектор  $(b_1, b_2, b_3)$  лежит в плоскости, образованной вектор-столбцами матрицы  $A$

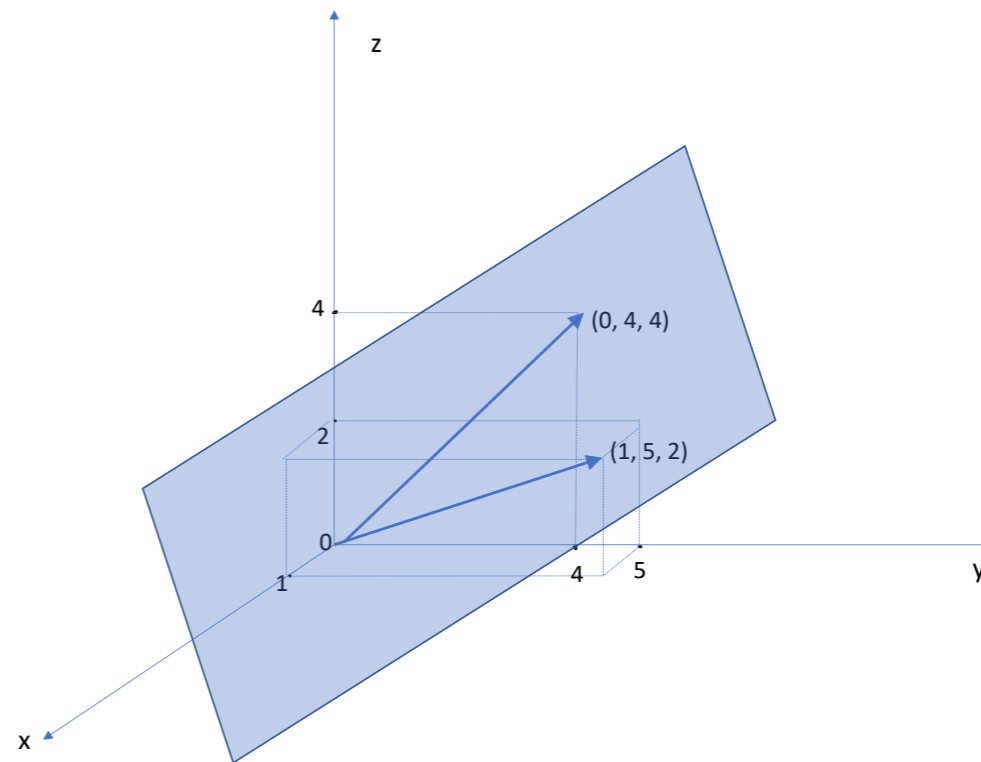
# Векторные пространства

## Набор векторов $V$ :

1. Сумма векторов  $v_1 + v_2$  принадлежит пространству  $V$
2. Произведение  $cv$  вектора  $v$  на скаляр  $c$  принадлежит пространству  $V$

## Подпространство:

Подмножество  $V$ , которое само является векторным пространством



# Линейная независимость, базис и размерность

Ранг матрицы  $r$  = число линейно независимых строк

$r$  столбцов, содержащих эти элементы - также линейно независимы

# Линейная независимость, базис и размерность

Ранг матрицы  $r$  = число линейно независимых строк

$r$  столбцов, содержащих эти элементы - также линейно независимы

Множество  $k$  векторов из  $\mathbf{R}^m$  обязательно линейно зависимо, если  $k > m$

Если векторное пространство  $V$  состоит из всех линейных комбинаций векторов  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , то говорят, что эти векторы **порождают**  $V$ , а  $V$  называют **линейной оболочкой** этих векторов.

Пример:

$$w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 0), w_3 = (-2, 0, 0)$$

Что порождают три вектора?

Два вектора  $w_1$  и  $w_2$ ?

Два вектора  $w_1$  и  $w_3$ ?

# Линейная независимость, базис и размерность

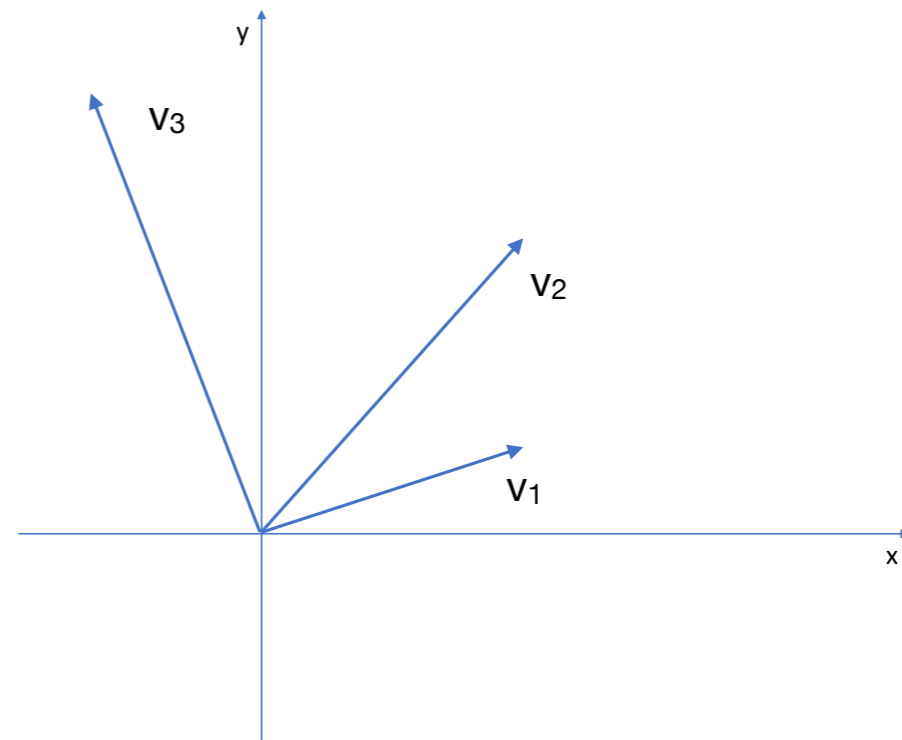
Ранг матрицы  $r$  = число линейно независимых строк  
 $r$  столбцов, содержащих эти элементы - также линейно независимы

Множество  $k$  векторов из  $\mathbf{R}^m$  обязательно линейно зависимо, если  $k > m$

Если векторное пространство  $V$  состоит из всех линейных комбинаций векторов  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , то говорят, что эти векторы **порождают**  $V$ , а  $V$  называют **линейной оболочкой** этих векторов.

Множество векторов называют **базисом**, если:

1. Оно линейно независимо
2. Оно порождает это векторное пространство



# Линейная независимость, базис и размерность

Ранг матрицы  $r$  = число линейно независимых строк  
 $r$  столбцов, содержащих эти элементы - также линейно независимы

Множество  $k$  векторов из  $\mathbf{R}^m$  обязательно линейно зависимо, если  $k > m$

Если векторное пространство  $V$  состоит из всех линейных комбинаций векторов  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , то говорят, что эти векторы **порождают**  $V$ , а  $V$  называют **линейной оболочкой** этих векторов.

Пространство столбцов матрицы  $m \times n$   $A$  - линейная оболочка вектор-столбцов.  
Пространство строк - подпространство, порождаемое строками.

Множество векторов называют **базисом**, если:

1. Оно линейно независимо
2. Оно порождает это векторное пространство

Любые два базиса векторного пространства  $V$  содержат одинаковое число векторов. Это число называют **размерностью** пространства  $V$ .

Размерность пространства строк матрицы = ранг этой матрицы

# Размерность в машинном обучении

Линейная зависимость признаков => лишняя информация

Проклятие размерности:

- \* data sparsity
- \* statistical significance
- \* generalisation
- \*  $p \gg n \Rightarrow$  вообще печаль



Пример одномерного dataset?

( $x$  и  $y$  - в одном и том же измерении)

# Системы линейных уравнений

## Линейная регрессия

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_p \end{bmatrix}$$

$$y = Xw$$

Точного решения, как правило, нет

Ошибка  $\epsilon = \|X\bar{w} - y\|$

# Системы линейных уравнений

## Линейная регрессия

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_p \end{bmatrix}$$

$$y = Xw$$

Точного решения, как правило, нет

Ошибка  $\epsilon = \|X\bar{w} - y\|$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

Задача: решить уравнение:

$$y = Xw + \epsilon$$

Найти такое  $\bar{w}$ , что  $\epsilon = \|X\bar{w} - b\| \rightarrow \min$

$$X^T X \bar{w} = X^T y$$

решение:

$$\bar{w} = (X^T X)^{-1} X^T b$$

# Матричные преобразования

$$A(b\vec{x} + c\vec{y}) = b(A\vec{x}) + c(A\vec{y})$$

Транзитивность: свойство линейного преобразования

Пример: является ли линейным преобразованием  
функция  $y = ax + b$ ?

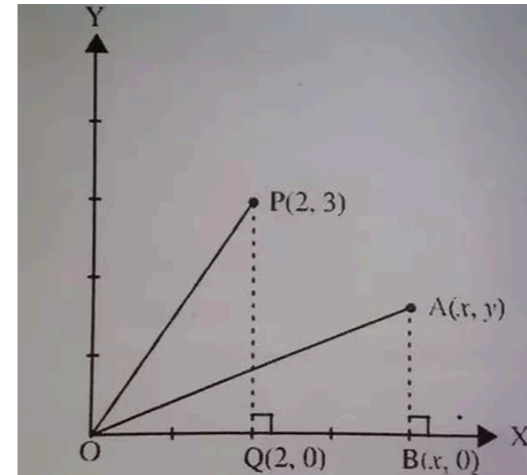
# Матричные преобразования: Проекция, вращение

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

## Проекция

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

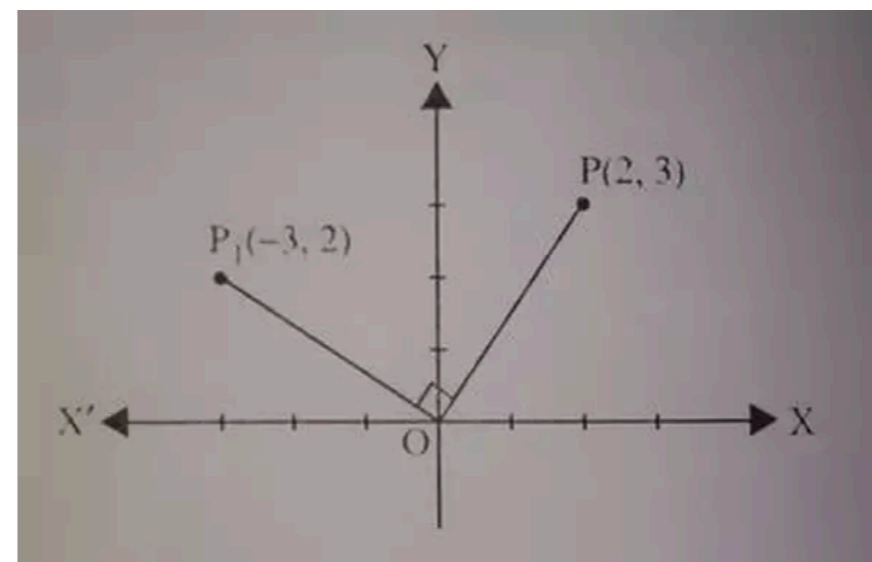


## Вращение

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Линейные преобразования векторных пространств

Матрица  $m \times n$  - линейное преобразование:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

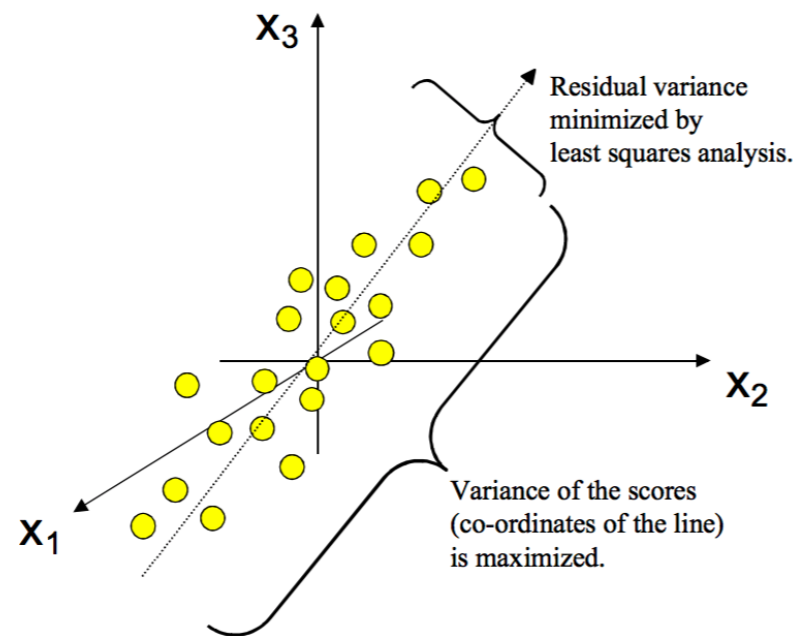
$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 39 \end{bmatrix}$$

# Линейные преобразования векторных пространств

Матрица  $m \times n$  - линейное преобразование:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 39 \end{bmatrix}$$

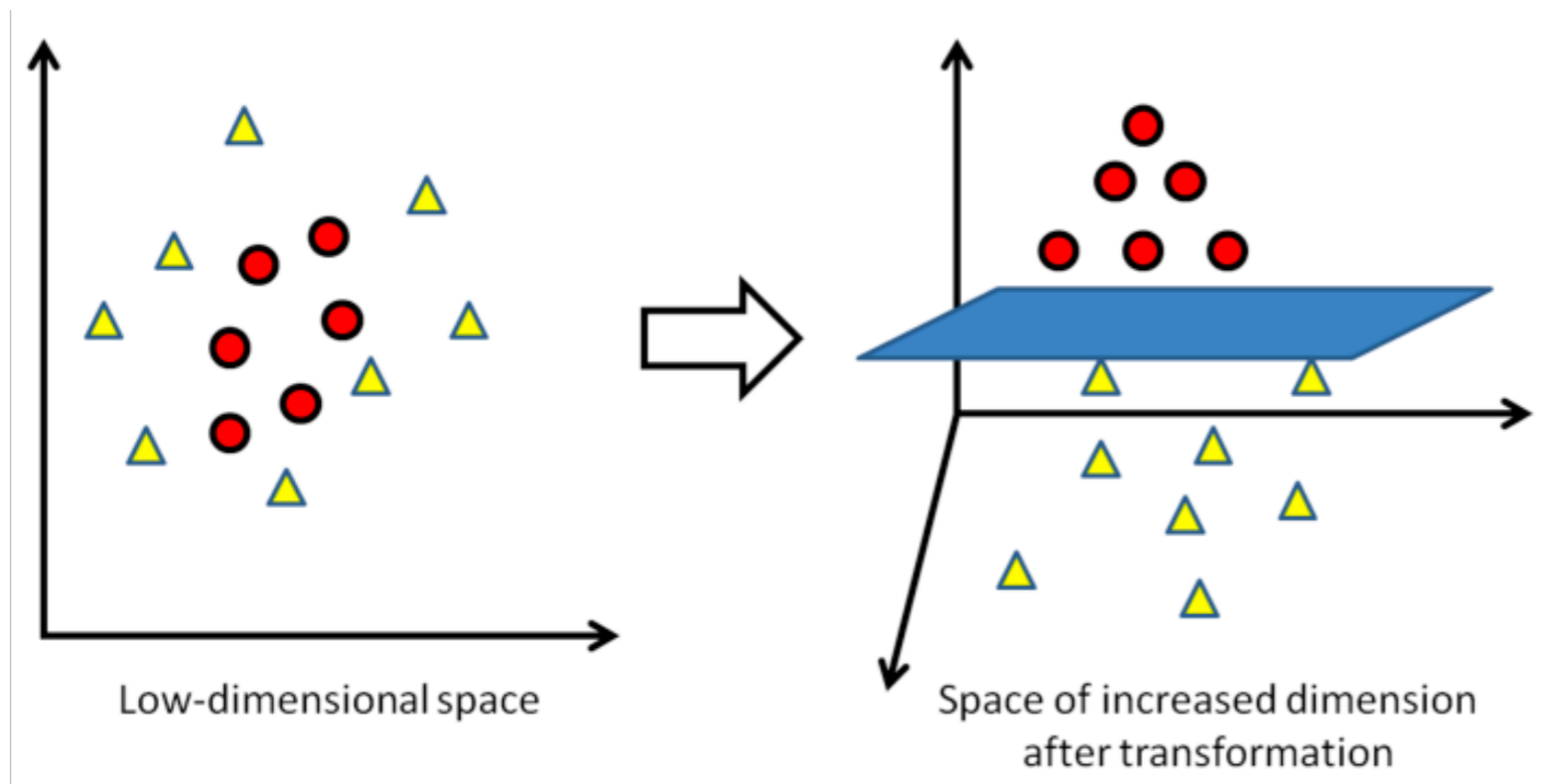


$$m < n$$

# Линейные преобразования векторных пространств

Матрица  $m \times n$  - линейное преобразование:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$



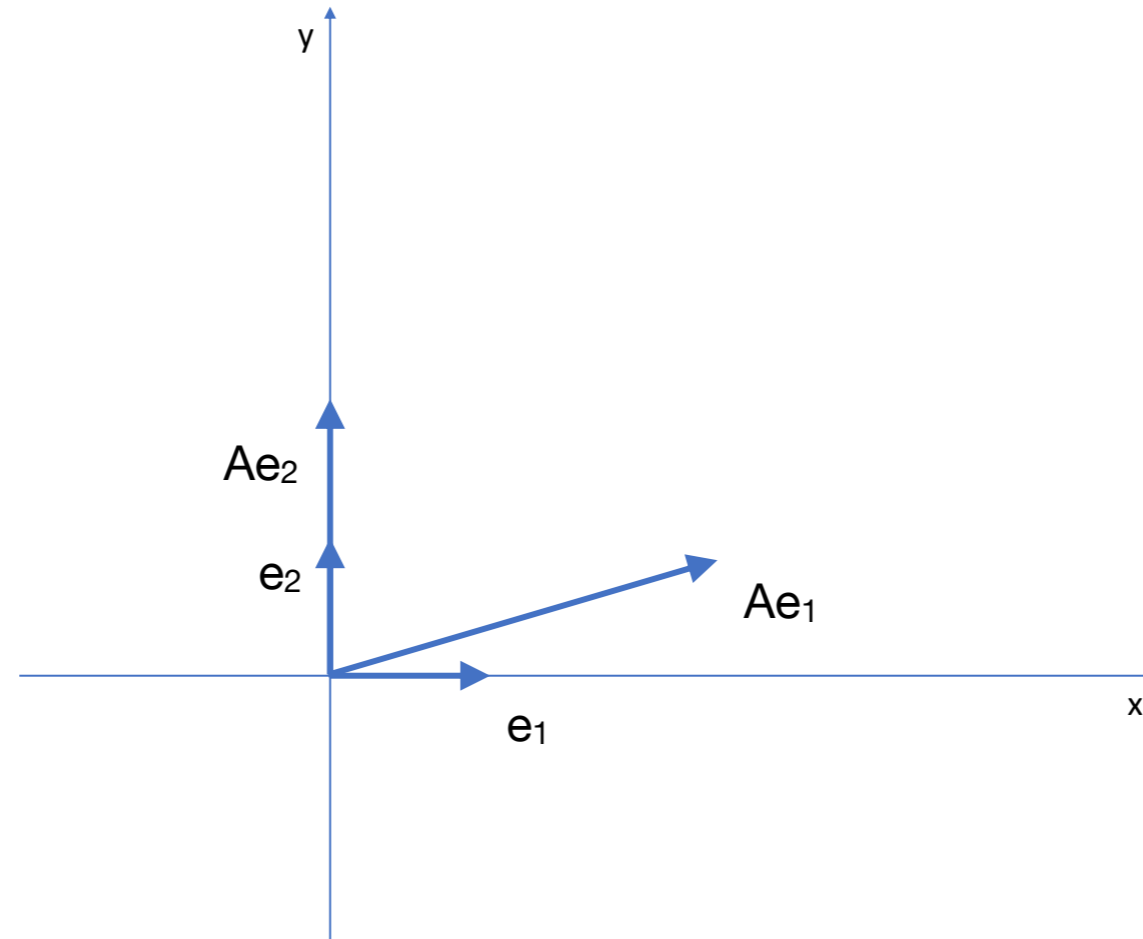
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 51 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$m > n$$

# Собственные значения и собственные векторы

Пример

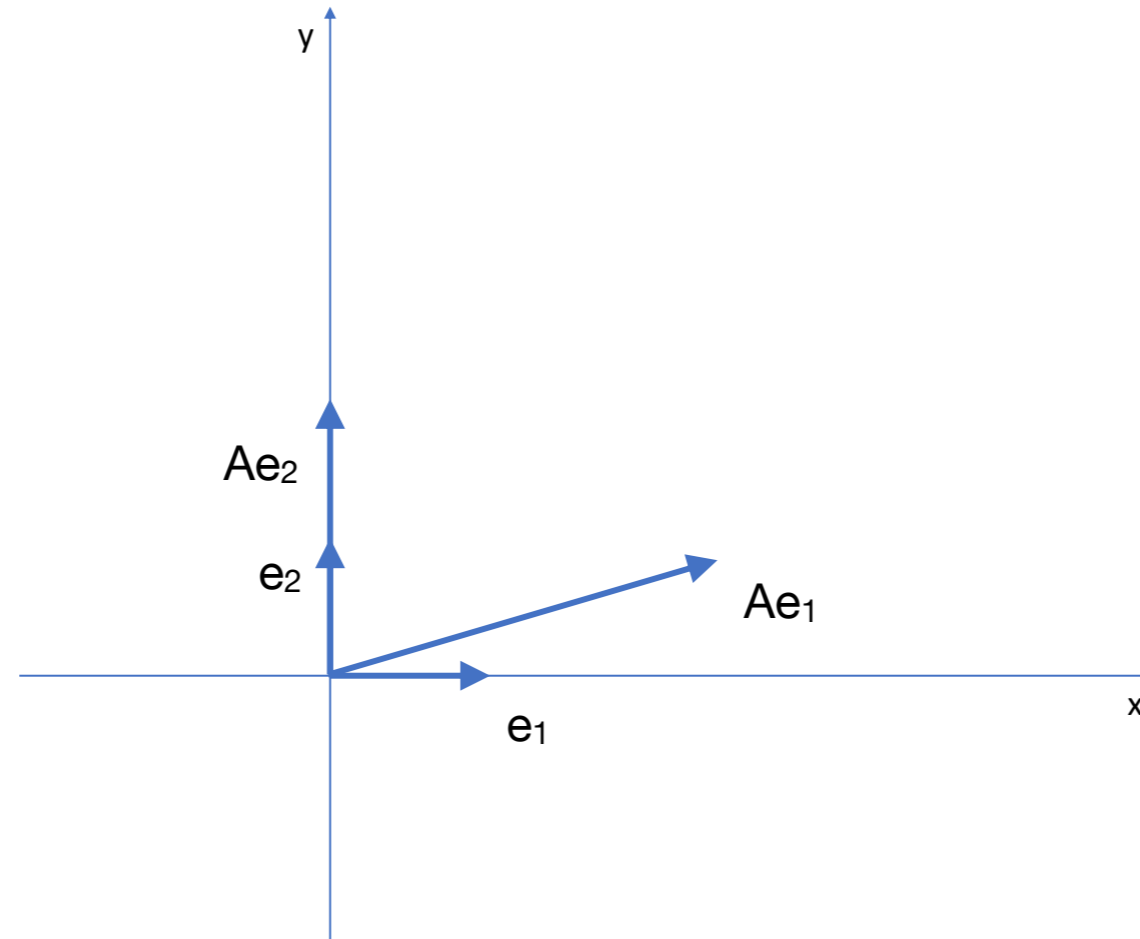
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



# Собственные значения и собственные векторы

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

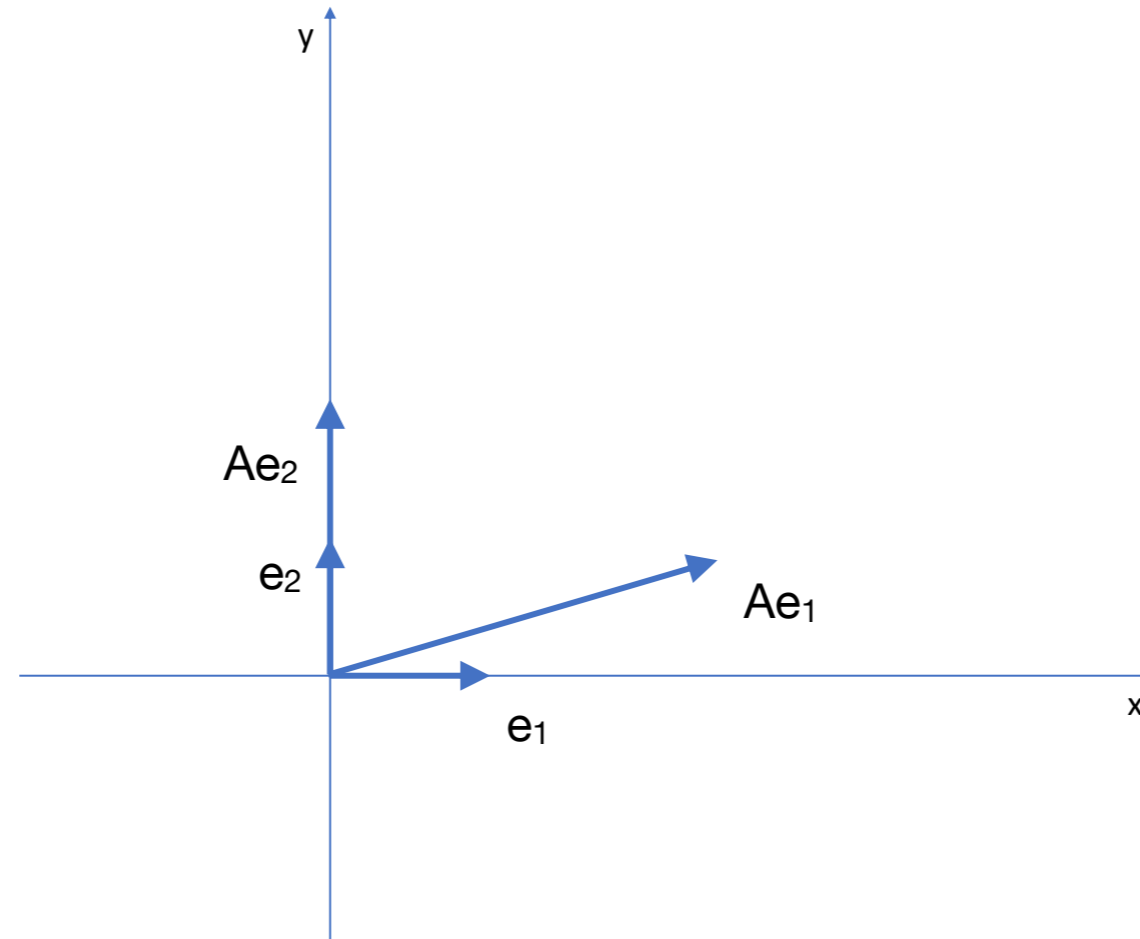


$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Собственные значения и собственные векторы

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda x$$

# Собственные значения и собственные векторы

$$Ax = \lambda x$$

$\Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Свойства собственных значений:

**1.**  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{trace}(A)$

**2.**  $\lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_n = \det(A)$

Пример:

найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Проверить, что свойства 1 и 2 выполняются

# Диагональные матрицы

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

Пример использования: разложение  $A = LDU$  облегчает решение  $Ax = b$

# Диагональные матрицы

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

Пример использования: разложение  $A = LDU$  облегчает решение  $Ax = b$

Приятные свойства:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Диагональные матрицы

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

Пример использования: разложение  $A = LDU$  облегчает решение  $Ax = b$

Приятные свойства:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{rank}(D) = 3$$

# Диагональные матрицы

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

Пример использования: разложение  $A = LDU$  облегчает решение  $Ax = b$

Приятные свойства:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{rank}(D) = 3$$

$$\det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & & & \\ & 1 - \lambda & & \\ & & 2 - \lambda & \\ & & & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)(-\lambda) = 0$$

# Диагональные матрицы

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

Пример использования: разложение  $A = LDU$  облегчает решение  $Ax = b$

Приятные свойства:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{rank}(D) = 3$$

$$\det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & & & \\ & 1 - \lambda & & \\ & & 2 - \lambda & \\ & & & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)(-\lambda) = 0$$

Пусть матрица  $A$  размера  $n \times n$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Обозначим матрицу  $S = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ . Тогда

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

# Диагональные матрицы

Приятные свойства:

Пусть матрица  $A$  размера  $n \times n$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .  
Обозначим матрицу  $S = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ . Тогда

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Матрицы  $A$  и  $S$  **подобны**, и

$$AS = S\Lambda, \text{ или } S^{-1}AS = \Lambda, \text{ или } A = S\Lambda S^{-1}$$

Возведение матрицы в степень:

$$A^n = (S\Lambda S^{-1})^n = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) \dots (S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^n S^{-1}$$

# Марковская Матрица

Каждый год 20% калифорнийцев выезжает из Калифорнии, и 10% людей, живущих в остальных штатах, въезжают в неё

$$0.9y_0 + 0.2z_0 = y_1$$

$$0.1y_0 + 0.8z_0 = z_1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

## Марковский процесс:

1. сумма элементов каждого столбца = 1

2. история игнорируется: каждая последующая ситуация  $u_{k+1}$  зависит только от текущей  $u_k$ . Данные  $u_{k-1}$ ,  $u_{k-2}$ , ... могут быть выброшены

## Марковская матрица:

Каждый элемент  $a_{ij}$  = Вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.7$$

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & \\ & 0.7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \\ &= (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)(0.7)^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Итоги

**Сегодня мы научились:**

**Представлять вектора и матрицы как геометрические объекты**

**Выяснили геометрический смысл**

**систем линейных уравнений**

**линейных преобразований**

**И узнали, для чего нам нужны эти преобразования в ML**

Спасибо  
за внимание!



**<https://otus.ru/polls/4411/>**