OTUS

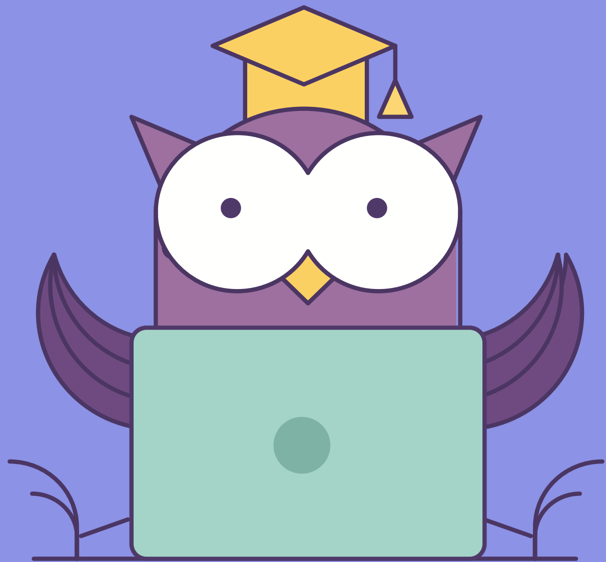
ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Теория множеств

Впереди Математический анализ и Теория вероятности

Лукьянченко Петр Павлович

Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте + если все хорошо

Правила вебинара

- Активно участвуем
- Задаем вопросы в чат
- Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

Знакомство

>10 лет преподавания в НИУ-ВШЭ

>3 лет – Quantitative Research (UFG, UBS)

>6 лет – Data Science (Retail, Госсектор)

Учился в London School of Economics, University College London
Специализация: Численные методы решения уравнений. Функциональные языки программирования

Цели занятия

После занятия вы сможете:

1. Вспомним основные определения

2. Совершать преобразования множеств

3. Будете готовы к определению понятия меры

Определение

Георг Кантор

«Множество есть многое,
мыслимое нами как единое»

Определение

Георг Кантор

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

Множеством называется произвольный набор (совокупность, класс, семейство) каких-либо объектов. Объекты, входящие во множество, называются его *элементами*. Если объект x является элементом множества A, то говорят, что x *принадлежит* A, и пишут $x \in A$.

Примеры основных множеств

OTUS

N - множество всех натуральных чисел;

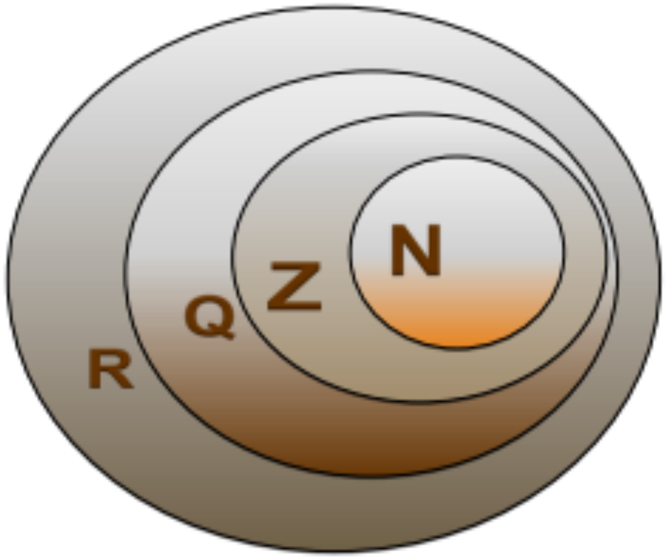
Z - множество всех целых чисел;

Q - множество всех рациональных чисел;

R - множество всех действительных чисел;

C - множество всех комплексных чисел;

Z_0 - множество всех неотрицательных целых чисел.



Определение

Множество A называется **бесконечным**, если каково бы ни было натуральное число N, найдется подмножество A, содержащее ровно N элементов.

Как же записывать множество ?

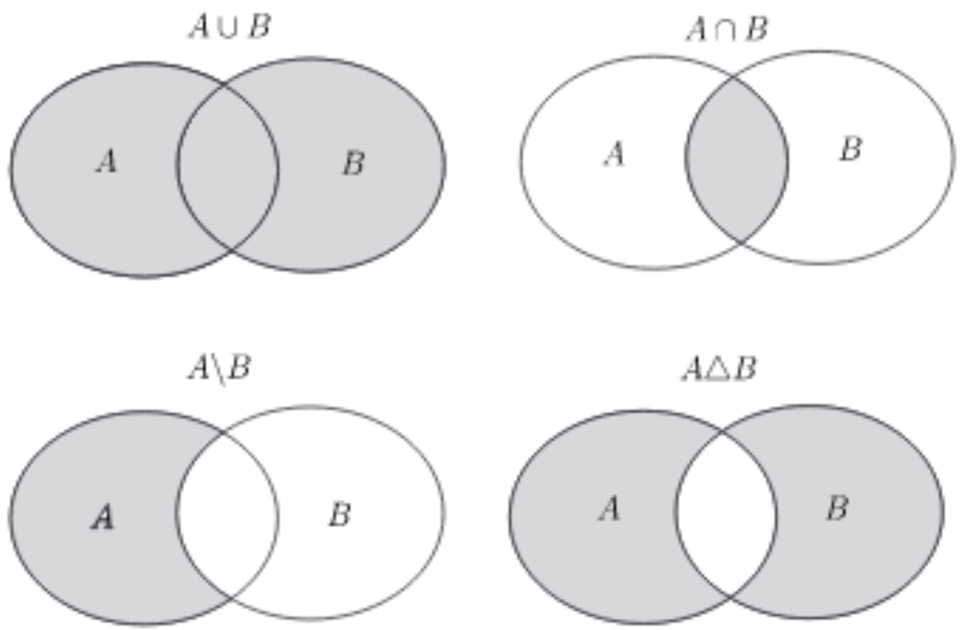
Ответ: 3 способа

$$\{x \mid x - \textit{положительное число меньше } 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\{x \mid x = 2y,\ y \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x - \textit{четное число}\}$$

Операции с множествами

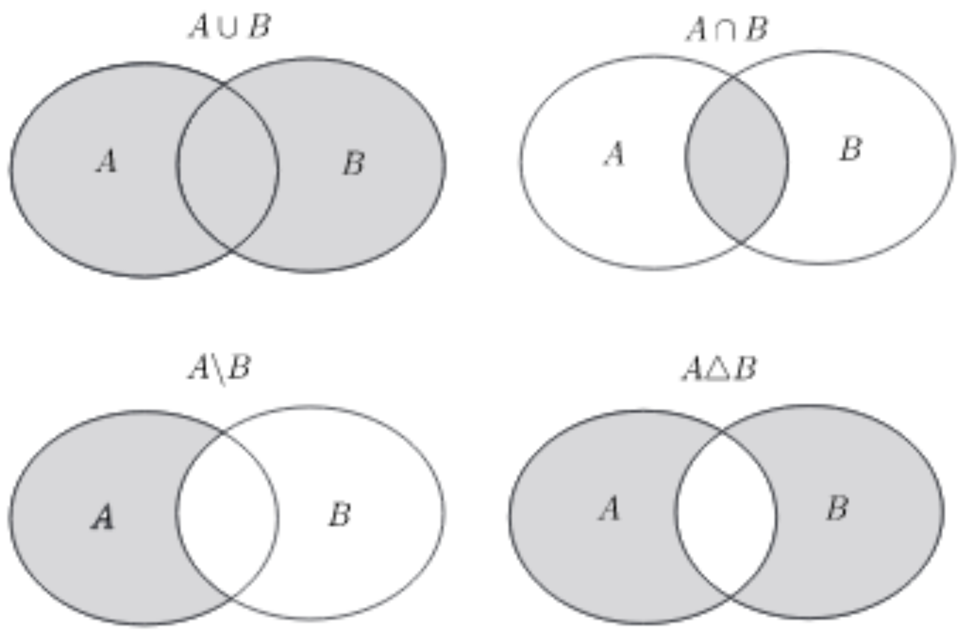
- *Объединением* A и B называется множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.
- *Пересечением* A и B называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.
- *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.
- *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $A \triangle B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B, \text{ или } x \in B \text{ и } x \notin A\}$.
- *Дополнением* множества A называется множество $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$.



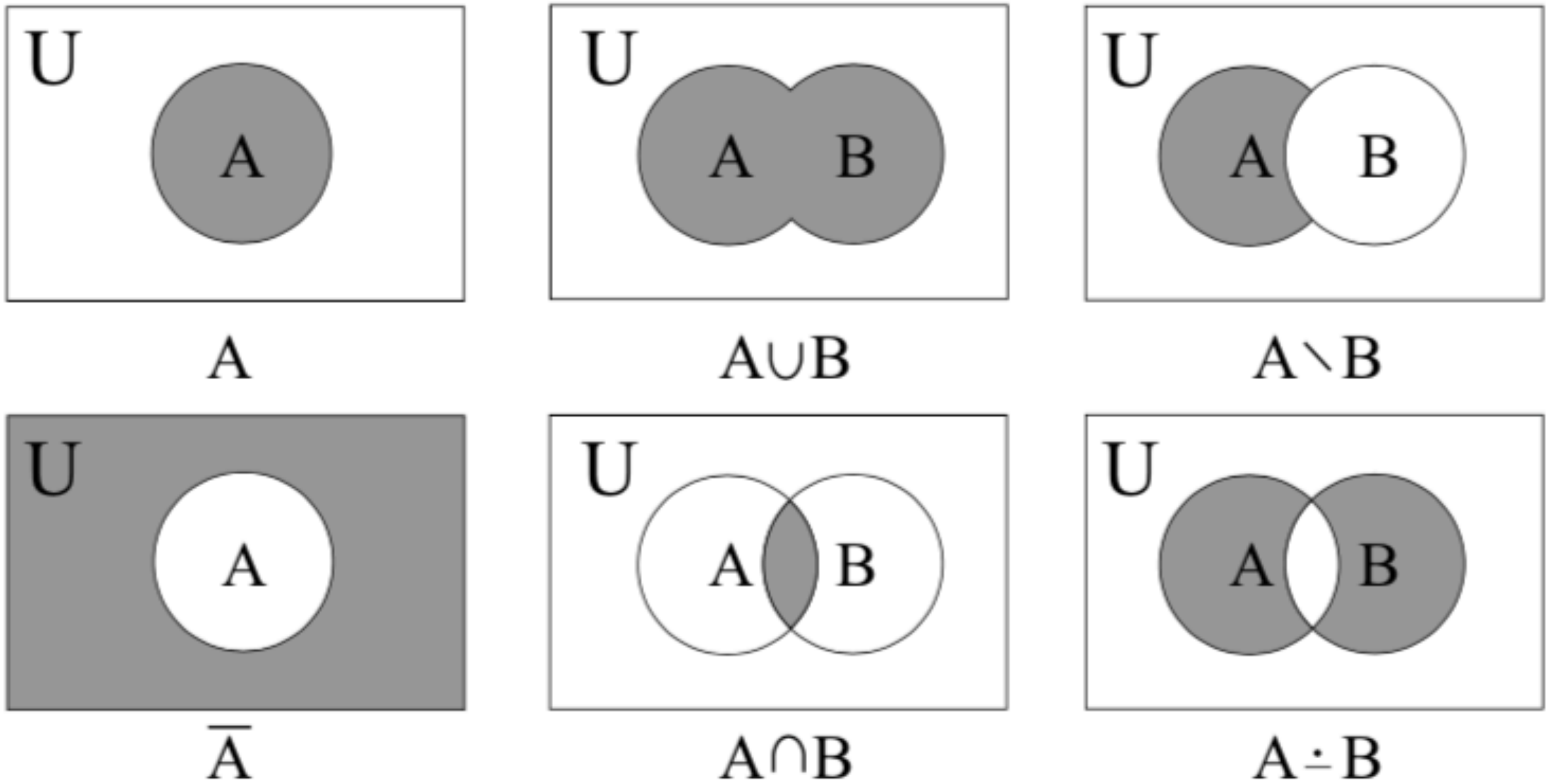
Операции с множествами

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \Delta B \equiv \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\},$$

где $\vee$ — логическое «или» (неисключающее!), $\wedge$ — логическое «и», $\neg$ — логическое «не».



Операции с множествами

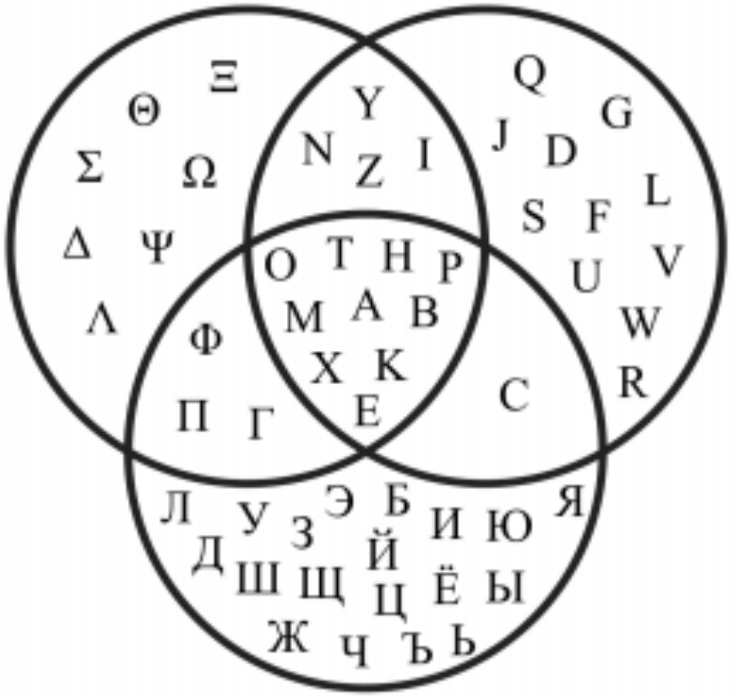


Примеры

$$\mathbf{A = \{1,2,3,4,6\},\ \ B = \{2,4,6\},\ \ C = \{1,5,6\}}$$

$$(A \cap B) \cup C$$

Алфавиты


Ξ
Θ
Σ Ω
Δ Ψ
Λ
Y
N Z I
Q
G
J D
L
S F
V
U
W
R
O T H P
M A B
Φ
X K
П Г E
C
Л У Э Б И Ю Я
З
Д Й
Ш Щ Ц Ё Ы
Ж Ч Ъ Ь

Мощность множества – это количество элементов в этом множестве.

Подмножество

Множество A является *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A также принадлежит множеству B. Обозначение: $A \subset B$. Множества A и B равны, если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$. Обозначение: $A = B$.

Имеют место следующие свойства:

a) Рефлексивность $\subset$*: для любого множества* A *выполнено* $A \subset A$*;*

b) Антисимметричность $\subset$*: если* $A \subset B$ *и* $B \subset A$*, то* $A = B$*;*

c) Транзитивность $\subset$*: если* $A \subset B$ *и* $B \subset C$*, то* $A \subset C$*;*

d) Рефлексивность $=$*: для любого множества* A *выполнено* $A = A$*;*

e) Симметричность $=$*: если* $A = B$*, то* $B = A$*;*

f) Транзитивность $=$*: если* $A = B$ *и* $B = C$*, то* $A = C$.

Задачи

Задание: Даны два множества, определить являются ли они подмножествами, найти их объединение, пересечение, разность и дополнение:

$$C=\{0,3, 4, 5, 7, 9,11, 18, 47\}$$
$$D=\{5, 7,47\}$$

Задание: Даны два множества, определить являются ли они подмножествами, найти их объединение, пересечение, разность и дополнение:

$$C=\{3, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 21, 50\}$$
$$D=\{8, 10,50\}$$

Задание: Даны два множества, определить являются ли они подмножествами, найти их объединение, пересечение, разность и дополнение:

$$C=\{0, 8, 14, 18, 21, 22, 25, 30, 55\}$$
$$D=\{0, 22,55\}$$

Каковая мощность множества ?

$$\{x \mid x^2 + 2x = 0\} =$$

$$|\{1, 2, 3, 4, 5\}| =$$

$$|\{1, 2, 3, 2\}| =$$

$$|\mathbb{N}| =$$

Свойства операций

1 Идемпотентность $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
2 Коммутативность $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3 Дистрибутивность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
4 Ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5 Свойство поглощения $A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$
6 Свойство нуля $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
7 Свойство единицы $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
8 Закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
9 Закон двойного отрицания (инволютивности) $\overline{\overline{A}} = A$
10 Свойство дополнения $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Теперь решаем задачки !

$$\{a, b\} \neq \{\{a, b\}\}$$

$$A = \{a, b, c\}.$$

$$2^A =$$

Декартово произведение

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_l\}$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_l), (a_2, b_1), ..., (a_k, b_l)\} =$$
$$= \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Примеры

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e}\},\ \ \mathbf{B} = \{\mathbf{f},\mathbf{c},\mathbf{d}\},\ \ \mathbf{C} = \{\mathbf{a},\mathbf{f},\mathbf{c}\}.$$

$$(A \cap B) \times (A \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C$$

Открытое множество

ε-окрестностью точки на прямой называется открытый шар ради- уса ε с центром в этой точке.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \varepsilon\}$$

Множество называется открытым, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ее окрестность.

Закрытое множество

Замкнутым **называется множество, содержащее все свои предельные точки (т. е. такие, что любой интервал, содержащий эту точку, пересекается со множеством еще хотя бы по одной точке)**

Выпуклое множество

Множество Q называется *выпуклым*, если для любых двух точек x, y из множества Q и любого $\lambda \in [0, 1]$ точка $\lambda x + (1 - \lambda)y$ также принадлежит множеству Q.

Другими словами, множество Q называется выпуклым, если для каждой пары точек $x, y \in Q$, множество Q также содержит весь *отрезок* $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Точка вида $\lambda x + (1 - \lambda)y$ для $\lambda \in [0, 1]$ называется *выпуклой комбинацией* точек x, y.

Ограниченное множество

Множество $X \subset \boldsymbol{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $b \in \boldsymbol{R}$, что для всех $x \in X$ имеет место неравенство $x \leq b$. Число b называется в этом случае числом, *ограничивающим сверху* множество X.

Множество X называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $a \in \boldsymbol{R}$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \geq a$. Число a называется в этом случае числом, *ограничивающим снизу* множество X.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

С помощью логических символов существования и всеобщности определение, например, ограниченного сверху множества можно записать следующим образом:

Есть вопросы или замечания?

Напишите в чат свои вопросы и замечания!

Ставьте + если все понятно

Антон Лоскутов

Mail: lukianchenko.pierre@gmail.com
Telegram: @Namur88
Slack: @Петр Лукьянченко

Спасибо
за внимание!