OTUS

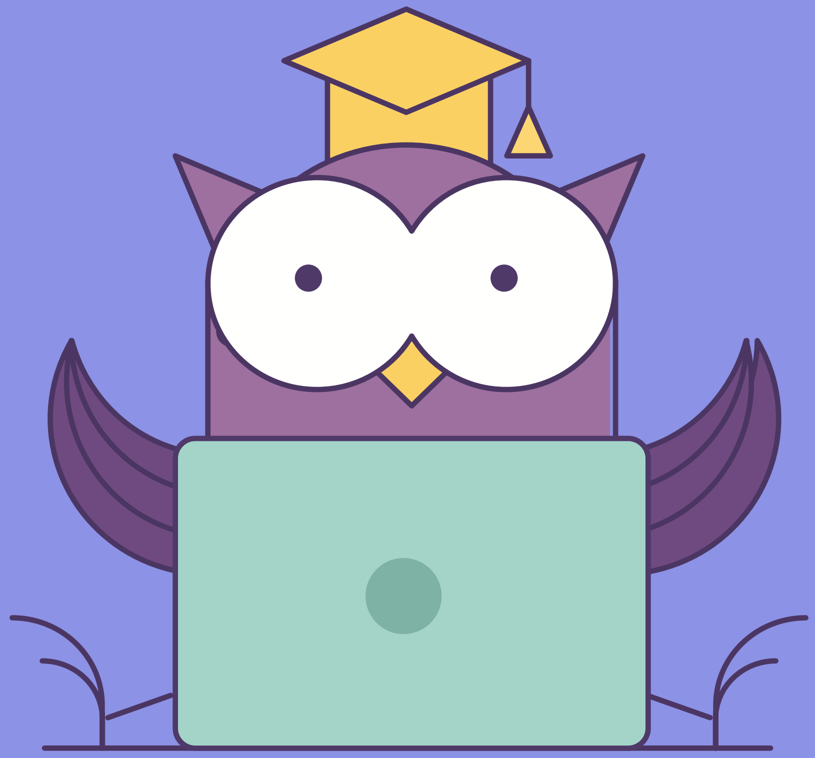
ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Метрические пространства

Норма, метрика, примеры

Леонов Иван

Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте + если все хорошо

Не забыть включить запись!!!

Правила вебинара

OTUS

Активно участвуем

Задаем вопросы в чат

Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

Векторные пространства

Набор векторов V:

1. Сумма векторов $v_1 + v_2$ принадлежит пространству V
2. Произведение cv вектора v на скаляр c принадлежит пространству V

Линейная независимость:

Векторные пространства

Набор векторов V:

1. Сумма векторов $v_1 + v_2$ принадлежит пространству V
2. Произведение cv вектора v на скаляр c принадлежит пространству V

Линейная независимость:

Вектора: $(v_1, v_{2, \ldots,}\, v_k)$ линейно зависимы
<=>
существуют константы $c_1, c_2, \ldots, c_{k,}$ не равные одновременно нулю:

$c_1 * v_1 + c_2 * v_2 + \ldots + c_k * v_k = 0$

Векторные пространства

Набор векторов V:

1. Сумма векторов $v_1 + v_2$ принадлежит пространству V
2. Произведение cv вектора v на скаляр c принадлежит пространству V

Линейная независимость:

Вектора: $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ линейно зависимы
<=>
существуют константы $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не равные одновременно нулю:

$$c_1 * v_1 + c_2 * v_2 + \ldots + c_k * v_k = 0$$

Линейная оболочка (span):

Векторные пространства

Набор векторов V:

1. Сумма векторов $v_1 + v_2$ принадлежит пространству V
2. Произведение cv вектора v на скаляр c принадлежит пространству V

Линейная независимость:

Вектора: $(v_1, v_{2, \ldots,} v_k)$ линейно зависимы
<=>
существуют константы $c_1, c_2, \ldots, c_{k,}$ не равные одновременно нулю:

$$c_1 * v_1 + c_2 * v_2 + \ldots + c_k * v_k = 0$$

Линейная оболочка (span):

Если векторное пространство V состоит из всех линейных комбинаций векторов w_1, w_2, …, w_n, то говорят, что эти векторы ***порождают*** V, а V называют ***линейной оболочкой*** этих векторов.

Векторные пространства

Евклидово пространство

Состоит из векторов **x**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in \mathbb{R}$$

Подпространство

Подмножество V, которое само является векторным пространством

1. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \implies \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
2. $\mathbf{v} \in V, c \in \mathbb{R} \implies c\mathbf{v} \in V$

Векторные пространства

Линейные отображения

Линейное отображение – это функция T: $V \to W$, где V и W – векторные пространства, которое удовлетворяет условиям линейности:

1. $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$, для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

2. $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T\mathbf{x}$, для всех $\mathbf{x} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Линейное отображение из V в себя называется ***линейным оператором***.

Матрица линейного отображения

1. $(A^\top)^\top = A$
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Метрические пространства

Неотрицательная функция d : X×X → **R** называется метрикой, если:

1. d(x,y) = 0   <=>   x = y
2. d(x,y)=d(y,x)
3. d(x, z) ≤ d(x, y) + d(y, z) (неравенство треугольника)

для всех x, y, z ∈ X

Примеры

1. d(x, y) = |x-y|,   x∈**R**, y∈**R**

2. $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

3. Пусть E - некое множество. Рассмотрим множество всех ограниченных на E функций

$$f : E \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R},$$

Определим расстояние

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

4. Рассмотрим множество всех последовательностей $x = \{x_n\}$, для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$$

Определим расстояние между точками $x = \{x_n\}$ и $y = \{y_n\}$:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$$

Метрические пространства

Машинное обучение

В каких алгоритмах ML мы рассматриваем расстояние между объектами?

Метрические пространства

Машинное обучение

В каких алгоритмах ML мы рассматриваем расстояние между объектами?

kNN

Метрические пространства

Машинное обучение

В каких алгоритмах ML мы рассматриваем расстояние между объектами?

kNN

Clustering

a. **K-means**
b. **DBSCAN**

Метрические пространства

Машинное обучение

В каких алгоритмах ML мы рассматриваем расстояние между объектами?

kNN

Clustering

a. **K-means**
b. **DBSCAN**

Recommender Systems

a. **User-based (Collaborative Filtering)**
b. **Item-based**

Открытое множество

OTUS

ε-окрестностью точки на прямой называется открытый шар ради- уса ε с центром в этой точке.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \| x - a| < \varepsilon\}$$

Множество называется открытым, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ее окрестность.

Закрытое множество

Замкнутым **называется множество, содержащее все свои предельные точки (т. е. такие, что любой интервал, содержащий эту точку, пересекается со множеством еще хотя бы по одной точке)**

Нормированные пространства

Линейные пространства (они же векторные)

1) каждой паре x,y элементов из L поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется суммой элементов x,y и обозначается $x + y$;

2) каждому элементу x из L и каждому действительному числу α поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется произведением элемента x на число α и обозначается αx;

причём эти операции удовлетворяют следующим двум группам условий:

I. 1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);

3) существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый 0, такой, что $x+0=x$, $\forall x \in L$;

4) $\forall x \in L\ \exists y \in L$: $x+y=0$;

II. 5) $1x=x\ \forall x \in L$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения);

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность относительно числового множителя);

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность относительно элементов пространства);

Нормированные пространства

Линейные *нормированные* пространства

Линейное пространство X (над полем действительных чисел) называется нормированным, если на X определена функция $\|x\| : x \to R$ такая, что

1) $\|x\| \geqslant 0, \qquad \forall x \in X;$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \qquad \forall x \in X, \forall \alpha \in R;$

3) $\|x+y\| \geqslant \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in X;$

4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$

Нормированные пространства

Примеры норм

p-норма

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Норма в пространстве функций, непрерывных на [a, b]

1. $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$

2. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

Эквивалентные нормы

Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие константы $c_1>0$ и $c_2>0$, что для любого $x \in X$

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant c_2\|x\|^*$$

Теорема: в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны

Нормированные пространства

Норма vs Метрика

Расстояние, порождённое нормой

$d(x, y) = \|x-y\|$

Расстояние, для которого не существует соответствующей нормы:

Дискретное расстояние:

$d(x, y) = 0$, если $x=y$

$d(x, y) = 1$, если $x \neq y$

Норма, порождённая расстоянием

Пусть дано векторное пространство *X* и метрика *d*, такая что:

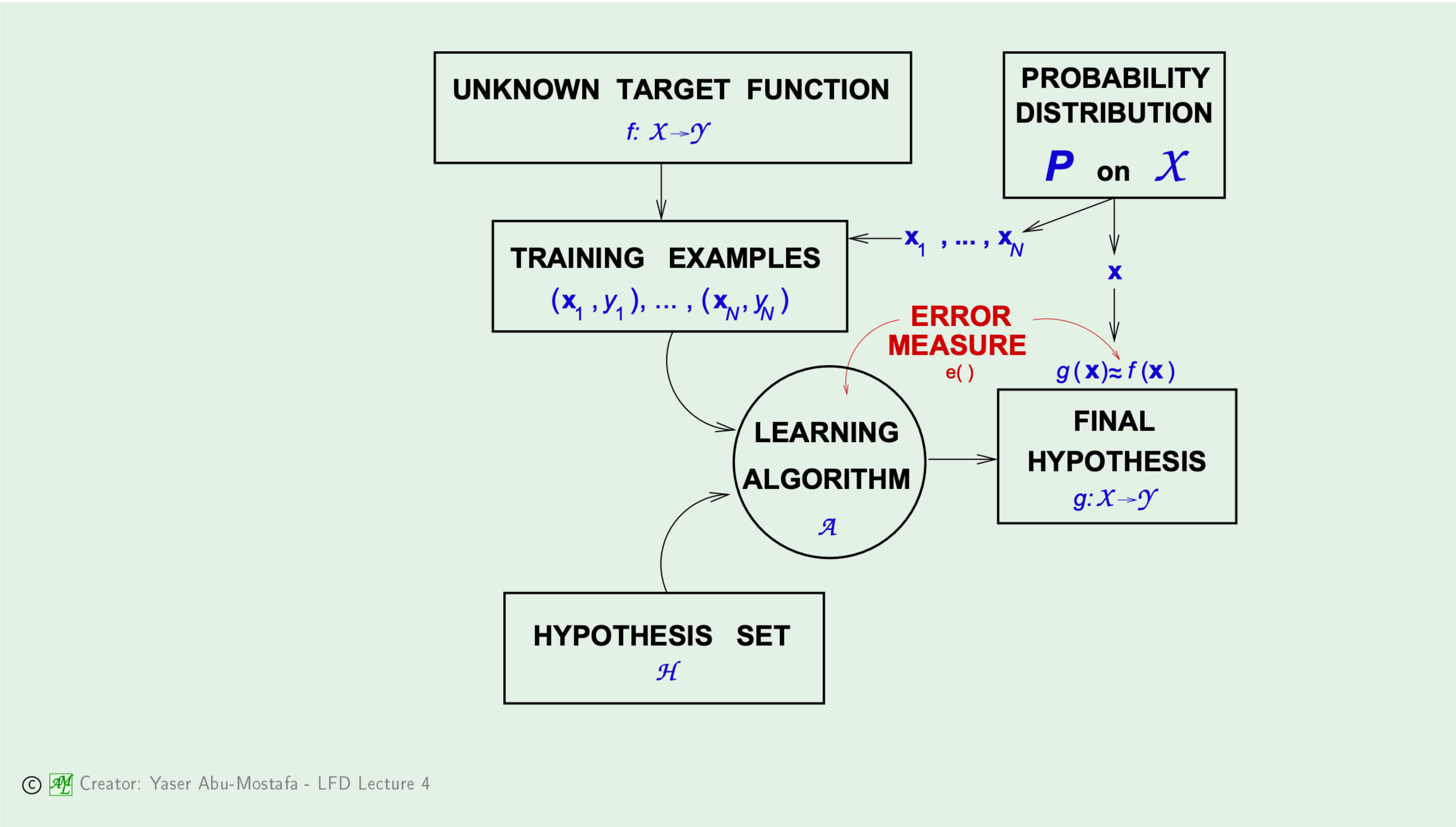
1. $d(x, y) = d(x+a, y+a)$
2. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$

Тогда можно определить норму:

$\|x\| = d(x, 0)$

Нормированные пространства

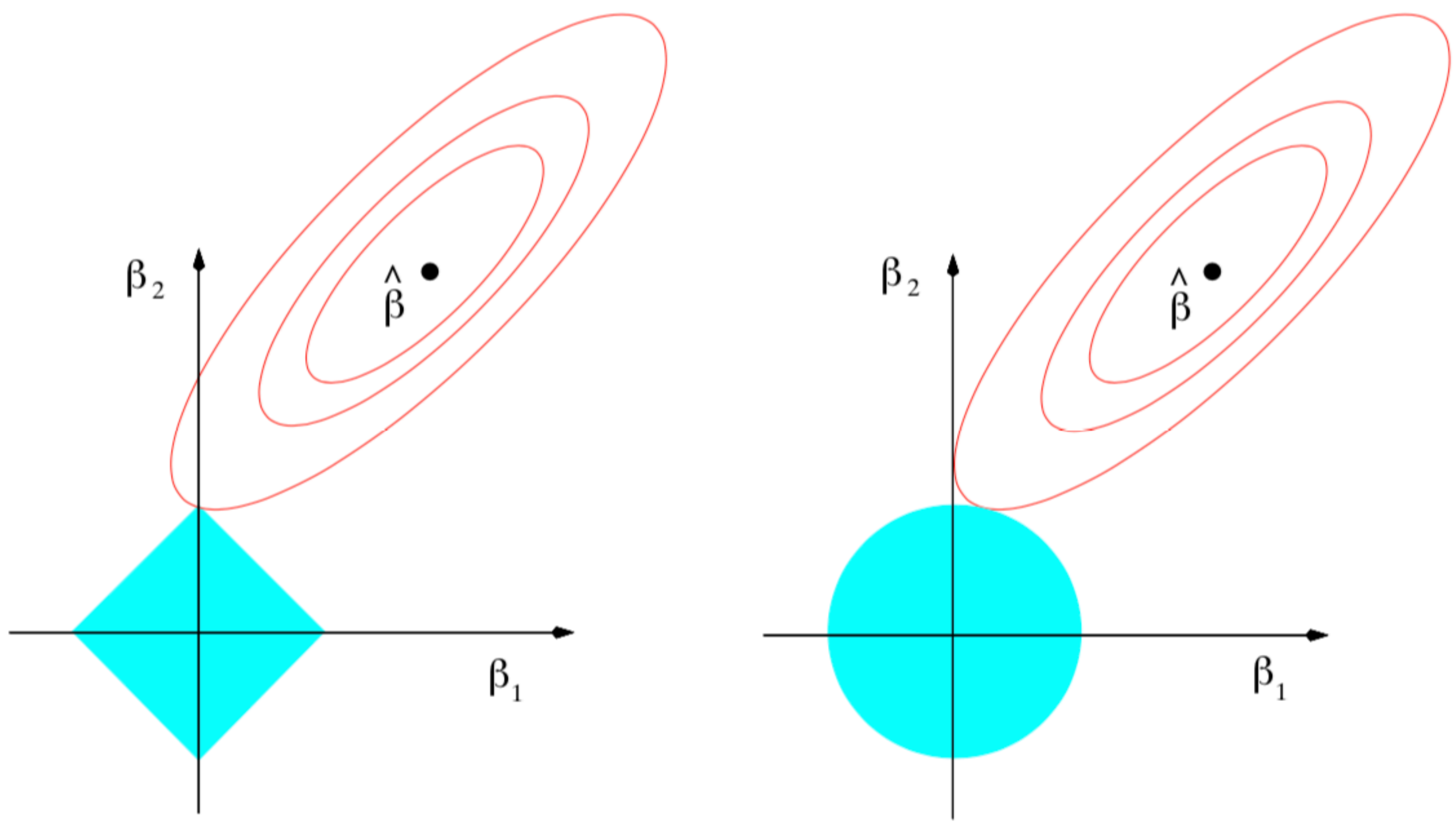
Машинное обучение



$E = \|f - g\|$

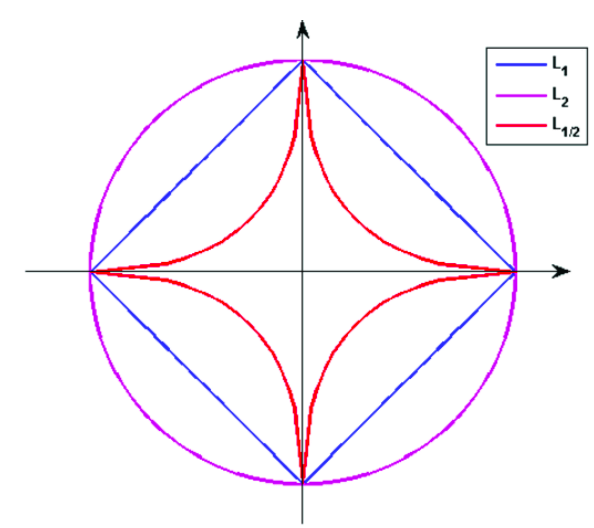
Нормированные пространства

Машинное обучение - регуляризация



$$\hat{\beta}^{\text{ridge}} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j \Big)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2 \right\}.$$

$$\hat{\beta}^{\text{lasso}} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j \Big)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} |\beta_j| \right\}.$$



Нормированные пространства

Два подхода к оптимизации

1. Оптимизация в пространстве параметров функции заданного вида

Пример: функция $y = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2$

2. Оптимизация в пространстве функций, определённых на интервале

Пример: градиентный бустинг

Опрос - как прошло занятие

https://otus.ru/polls/4417/

Спасибо
за внимание!