ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Первая нейронная сеть(нет)

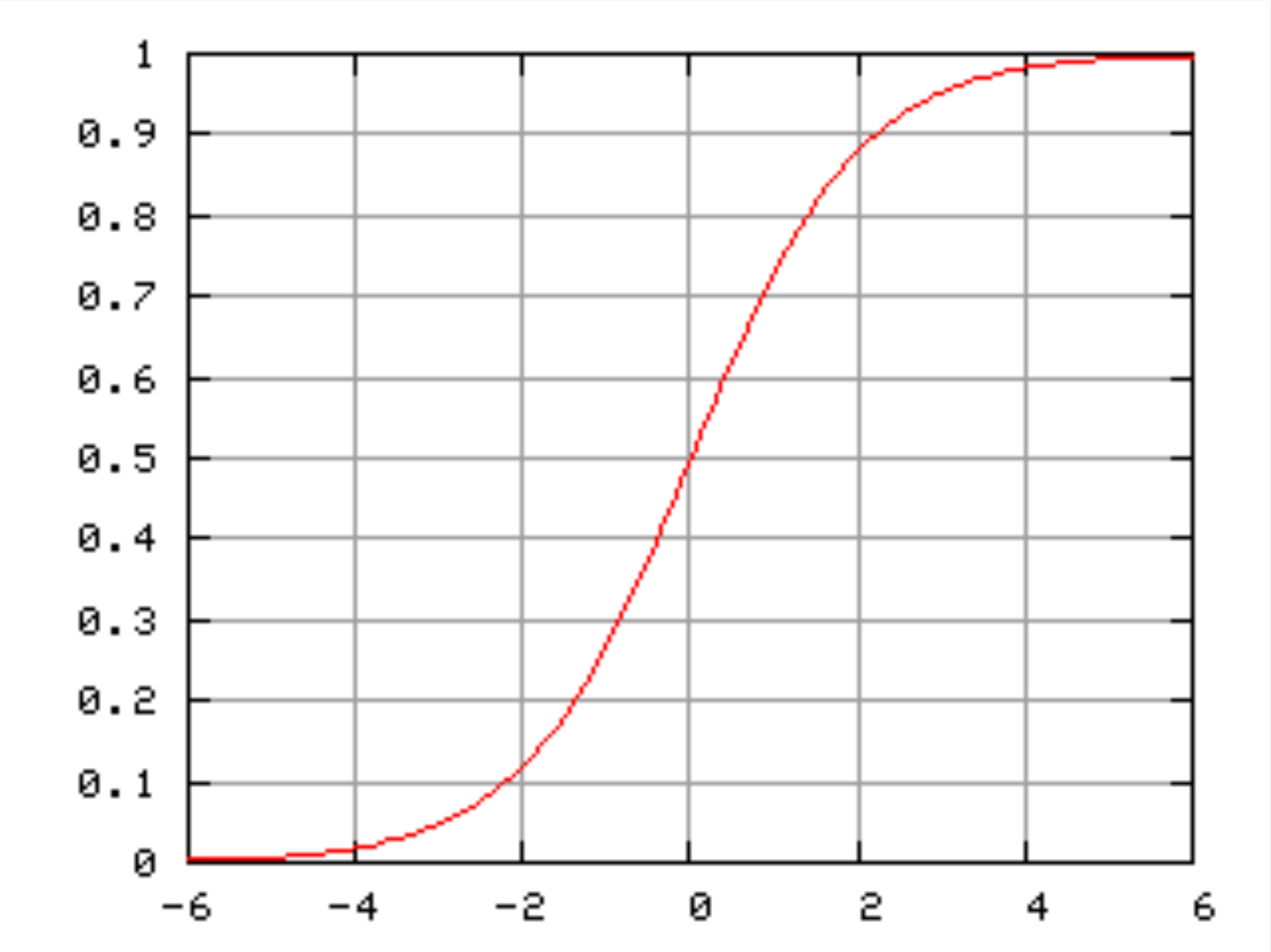
Теоретические основы и разбор кода

Артур Кадурин
Преподаватель

План на сегодня

1. **Логистическая регрессия**
2. Алгоритм обратного распространения
3. Трюк с логистической функцией
4. Практика

Логистическая функция



$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Логистическая регрессия

Логистическая регрессия — это модель применяющаяся для предсказания вероятности наступления события в зависимости от значений набора признаков.

$$\mathbb{P}\{y = 1|\boldsymbol{x}\} = \sigma(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{x}) \qquad \sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{z}}}$$

Логистическая регрессия

Логистическая регрессия — это модель применяющаяся для предсказания вероятности наступления события в зависимости от значений набора признаков.

$$\mathbb{P}\{y = 1|\boldsymbol{x}\} = \sigma(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{x}) \qquad \sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{z}}}$$

$$\mathbb{P}\{y|\boldsymbol{x}\} = \sigma(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{x})^y \left(1 - \sigma(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{x})\right)^{1-y}$$

$$L(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=0}^{N} \mathbb{P}\left\{y = y^{(i)} \middle| \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(i)}\right\}$$

Логистическая регрессия

$$L(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=0}^{N} \mathbb{P}\{y = y^{(i)} \big| \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(i)}\}$$

$$\mathbb{P}\{y|\boldsymbol{x}\} = \sigma(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x})^y \left(1 - \sigma(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x})\right)^{1-y} \qquad p^{(i)} = \sigma\left(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x}^{(i)}\right)$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N}\log L(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) = \\ -\frac{1}{N}\sum_i \left[y^{(i)}\log p^{(i)} + \left(1 - y^{(i)}\right)\log\left(1 - p^{(i)}\right)\right]$$

Артур Кадурин, преподаватель

Логистическая регрессия

$$L(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=0}^{N} \mathbb{P}\{y = y^{(i)} \big| \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(i)}\}$$

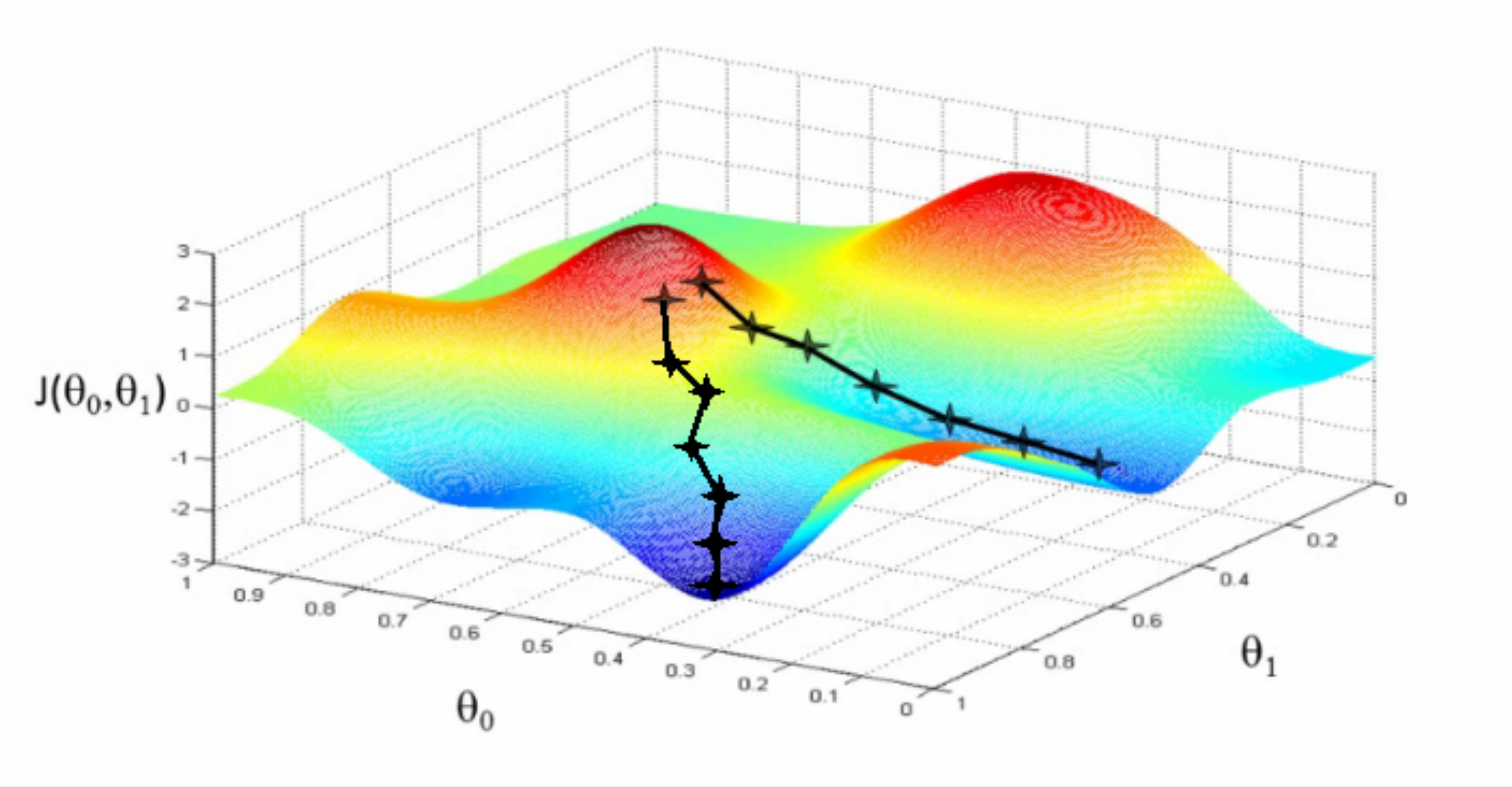
$$\mathbb{P}\{y|\boldsymbol{x}\} = \sigma(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x})^y \left(1 - \sigma(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x})\right)^{1-y} \qquad p^{(i)} = \sigma\left(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x}^{(i)}\right)$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N}\log L(\boldsymbol{x}, y|\boldsymbol{\theta}) =$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{i}\left[y^{(i)}\log p^{(i)} + \left(1 - y^{(i)}\right)\log\left(1 - p^{(i)}\right)\right]$$

Как минимизировать функцию потерь?

Градиентный спуск



План на сегодня

1. Логистическая регрессия
2. **Алгоритм обратного распространения**
3. Трюк с логистической функцией
4. Практика

Обратное распространение

$$\mathcal{L}(y, p|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N}\sum_i \left[y^{(i)} \log p^{(i)} + \left(1 - y^{(i)}\right) \log\left(1 - p^{(i)}\right)\right]$$

$$p = \sigma(\boldsymbol{\theta x} + b) = \sigma(\boldsymbol{z}) \qquad z = \boldsymbol{\theta x} + b \qquad \sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{z}}}$$

Обратное распространение

$$\mathcal{L}(y, p|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N}\sum_i \left[y^{(i)} \log p^{(i)} + \left(1 - y^{(i)}\right) \log\left(1 - p^{(i)}\right)\right]$$

$$p = \sigma(\boldsymbol{\theta x} + b) = \sigma(\boldsymbol{z}) \qquad z = \boldsymbol{\theta x} + b \qquad \sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{z}}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \frac{\partial p}{dz} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{1 - y}{1 - p} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \sigma(z)(1 - \sigma(z)) \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = x$$

Обратное распространение

$$\mathcal{L}(y,p|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N}\sum_i \left[y^{(i)}\log p^{(i)} + \left(1-y^{(i)}\right)\log\left(1-p^{(i)}\right)\right]$$

$$p = \sigma(\boldsymbol{\theta x} + b) = \sigma(\boldsymbol{z}) \qquad z = \boldsymbol{\theta x} + b \qquad \sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1+e^{-\boldsymbol{z}}}$$

$$p = \sigma_1\left(z_1\left(\sigma_0\left(z_0(x)\right)\right)\right) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_0} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\sigma_0}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial\theta_0}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{1-y}{1-p} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \sigma(z)(1-\sigma(z)) \qquad \frac{\partial z}{\partial\theta} = x$$

План на сегодня

1. Логистическая регрессия
2. Алгоритм обратного распространения
3. **Трюк с логистической функцией**
4. Практика

Логистическая функция

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{z}}}$$

Какие могут быть проблемы?

Логистическая функция

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{z}}}$$

Какие могут быть проблемы?

При относительно небольших абсолютных значениях z $\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}$ может оказаться слишком большим.

Логистическая функция

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Какие могут быть проблемы?

При относительно небольших абсолютных значениях z $\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}$ может оказаться слишком большим.

При вычислении функции ошибки мы считаем логарифм от сигмоиды, если сигмоида равна нулю, то логарифм $-\mathrm{inf}$.

Логистическая функция

$$-\log\sigma(z) = -\log\frac{1}{1+e^{-z}} = \log(1+e^{-z}) =$$

$$\log\frac{1+e^{z}}{e^{z}} = -z + \log(1+e^{z}) =$$

$$\log\left(1+e^{-|z|}\right) - min(0,z)$$

План на сегодня

1. Логистическая регрессия
2. Алгоритм обратного распространения
3. Трюк с логистической функцией
4. **Практика**

Спасибо
за внимание!